

# FONDAMENTI DI ALGEBRA

L'algebra è un ramo fondamentale della matematica che si occupa della manipolazione e dello studio di espressioni simboliche. Attraverso l'uso di variabili, numeri e operazioni, l'algebra permette di generalizzare e astrarre concetti matematici, fornendo strumenti potenti per risolvere una vasta gamma di problemi.



# Monomi e Polinomi

## Monomi

Un monomio è un'espressione algebrica composta da un solo termine, che può essere un numero, una variabile o il prodotto di un numero e una o più variabili. I monomi possono essere classificati in base al numero di fattori variabili (grado del monomio) e al coefficiente numerico.

## Polinomi

Un polinomio è una somma di monomi. I polinomi sono espressioni algebriche più complesse, che possono contenere diverse variabili e diversi gradi. Possono essere classificati in base al grado massimo delle variabili presenti (grado del polinomio) e al numero di termini.

## Operazioni con Monomi e Polinomi

Le principali operazioni con monomi e polinomi sono l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione. Due monomi si dicono **SIMILI** se hanno la stessa parte letterale. L'operazione di somma/sottrazione può essere eseguita **SOLAMENTE** tra monomi simili, mentre la moltiplicazione/divisione può essere effettuata sempre. In quest'ultimo caso, le operazioni seguono le regole delle potenze.

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \frac{4}{x-2} + \frac{1}{1-x} - \frac{5x-4}{x^2-3x+2} \right) : \frac{2x-3}{x^2-5x+6} \right\} : (x^2-2x-3) - \frac{x}{3-2x} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \left\{ \left( \frac{4}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{5x-4}{(x-2)(x-1)} \right) : \frac{2x-3}{(x-3)(x-2)} \right\} : (x-3)(x+1) + \frac{x}{2x-3} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \left\{ \left( \frac{4(x-1) - (x-2) - 5x+4}{(x-2)(x-1)} \right) : \frac{2x-3}{(x-3)(x-2)} \right\} : (x-3)(x+1) + \frac{x}{2x-3} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \left\{ \left( \frac{4x-4-x+2-5x+4}{(x-2)(x-1)} \right) : \frac{2x-3}{(x-3)(x-2)} \right\} : (x-3)(x+1) + \frac{x}{2x-3} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \left\{ \left( \frac{-2(x-1)}{(x-2)(x-1)} \right) : \frac{2x-3}{(x-3)(x-2)} \right\} : (x-3)(x+1) + \frac{x}{2x-3} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \left\{ \left[ \frac{-2}{(x-2)} \cdot \frac{(x-3)(x-2)}{2x-3} \right] : (x-3)(x+1) + \frac{x}{2x-3} \right\} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \left\{ \frac{-2(x-3)}{(2x-3)} \cdot \frac{1}{(x-3)(x+1)} + \frac{x}{2x-3} \right\} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \left\{ \frac{-2}{(2x-3)} \cdot \frac{1}{(x+1)} + \frac{x}{2x-3} \right\} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \left\{ \frac{-2}{(2x-3)(x+1)} + \frac{x}{2x-3} \right\} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \frac{-2+x(x+1)}{(2x-3)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \frac{x^2+x-2}{(2x-3)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \frac{(x+2)(x-1)}{(2x-3)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \\ & = \frac{x+2}{2x-3} \end{aligned}$$

# Raccoglimento Totale e Scomposizione di un Polinomio

## Raccoglimento Totale

Il raccoglimento totale di un polinomio consiste nell'individuare il massimo comune divisore di tutti i termini e fattorizzarlo. Questa operazione permette di semplificare l'espressione e renderla più maneggevole per successive manipolazioni.

$$4x^3 - 6x^2y + 2x^2z - 4ax^2 + 6axy - 2axz =$$
$$= 2x(2x^2 - 3xy + xz - 2ax + 3ay - az)$$

## Scomposizione di un polinomio

La scomposizione di un polinomio consiste nel rappresentarlo come prodotto di due o più polinomi di grado inferiore. Questa tecnica è fondamentale per risolvere equazioni di grado superiore al primo e per analizzare le proprietà di un polinomio.

I principali metodi di scomposizione di un polinomio sono: il raccoglimento totale, l'uso dei prodotti notevoli, la ricerca delle radici reali e l'applicazione di formule specifiche per polinomi di grado superiore.

La scomposizione di un polinomio in fattori semplici è un passaggio cruciale per risolvere molti problemi algebrici. Permette di trovare le radici di un'equazione, analizzare il segno di un'espressione e semplificare calcoli più complessi.

# Prodotti Notevoli

<p><b>somma per differenza</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>quadrato del primo termine</li> <li>meno il quadrato del secondo termine</li> </ul>	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(4x + 5)(4x - 5) = 16x^2 - 25</math></li> <li><math>(2m^3 + n^2)(2m^3 - n^2) = 4m^6 - n^4</math></li> </ul>
<p><b>quadrato di un binomio</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>quadrato del primo termine</li> <li>+ o - il doppio prodotto del primo termine per il secondo termine</li> <li>più il quadrato del secondo termine</li> </ul>	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9</math></li> <li><math>(m^4 - 3n)^2 = m^8 - 6m^4n + 9n^2</math></li> </ul>
<p><b>cubo di un binomio</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>cubo del primo termine</li> <li>+ o - il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo termine</li> <li>+ o - il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo termine</li> <li>+ o - il cubo del secondo termine</li> </ul>	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(3x + 2)^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8</math></li> <li><math>(m^2 - 3n)^3 = m^6 - 9m^4n + 27m^2n^2 - 27n^3</math></li> </ul>
<p><b>quadrato di un trinomio</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>quadrato dei tre termini</li> <li>+ o - il doppio prodotto del primo termine per il secondo termine</li> <li>+ o - il doppio prodotto del primo termine per il terzo termine</li> <li>+ o - il doppio prodotto del secondo termine per il terzo termine</li> </ul>	$(a \pm b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \pm 2ac \pm 2bc$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>(2x + 3y + 1)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 1 + 12xy + 4x + 6y</math></li> <li><math>(m^2 + n - 3)^2 = m^4 + n^2 + 9 + 2m^2n - 6m^2 - 6n</math></li> </ul>

## Trinomio speciale

$$x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2)$$

$s = x_1 + x_2$        $p = x_1 \cdot x_2$

$$1. \quad a^2 + 8a + 7 = (a + 7)(a + 1)$$

$\begin{array}{ccc} & | & | \\ & 7+1 & 7 \cdot 1 \end{array}$

$$2. \quad y^2 - 3y - 10 = (y - 5)(y + 2)$$

$\begin{array}{ccc} & | & | \\ & -5+2 & (-5)(+2) \end{array}$

# Radici di un Polinomio

## 1 Definizione di Radice

La radice di un polinomio è un valore che, sostituito alla variabile, rende il polinomio uguale a zero. Le radici di un polinomio sono quindi i valori che annullano l'equazione rappresentata dal polinomio stesso.

## 2 Teorema Fondamentale dell'Algebra

Secondo il Teorema Fondamentale dell'Algebra, ogni polinomio di grado  $n$  ha esattamente  $n$  radici complesse (Reali + Immaginarie), contando le radici multiple. Questo teorema garantisce l'esistenza di soluzioni per qualsiasi equazione polinomiale.

## 3 Molteplicità delle Radici

Le radici di un polinomio possono essere semplici (compaiono una sola volta) o multiple (compaiono più volte). La molteplicità di una radice è importante per comprendere il comportamento del polinomio e per semplificare le operazioni algebriche.

## 4 Calcolo delle Radici

Il calcolo delle radici di un polinomio può essere effettuato utilizzando diverse tecniche, come la scomposizione in fattori, la formula risolutiva per polinomi di secondo grado (i.e. mediante calcolo del Delta) o metodi numerici per polinomi di grado superiore (es. Ruffini).

# Equazioni di Primo Grado

1

## Principi di equivalenza delle equazioni

1. Se si aggiunge o si sottrae lo stesso termine da entrambi i membri di un'equazione, essa rimane equivalente.
2. Se si moltiplica o si divide entrambi i membri di un'equazione per lo stesso numero diverso da zero, l'equazione rimane equivalente.

2

## Isolamento del termine incognita

Il primo passo per risolvere un'equazione di primo grado consiste nell'isolare il termine contenente l'incognita, eseguendo operazioni inverse su entrambi i membri dell'equazione.

3

## Divisione o Moltiplicazione

Se il coefficiente dell'incognita non è 1, è necessario dividere o moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per ottenere il coefficiente uguale a 1.

4

## Soluzione dell'Equazione

Una volta isolata l'incognita, la soluzione dell'equazione di primo grado è data dal valore che soddisfa l'uguaglianza. Questa soluzione può essere poi utilizzata per risolvere problemi concreti.

# Disequazioni di Primo Grado

1

## Segno della Disequazione

Le disequazioni di primo grado possono avere segno maggiore, minore, maggiore o uguale, e minore o uguale. Il segno determina l'insieme delle soluzioni.

2

## Isolamento dell'Incognita

Come per le equazioni, il primo passo è isolare l'incognita, eseguendo operazioni inverse su entrambi i membri della disequazione.

3

## Cambiamento di Segno

Quando si divide o si moltiplica per un numero negativo, il segno della disequazione deve essere invertito per mantenere la validità della relazione.

4

## Intervallo di Soluzioni

La soluzione di una disequazione di primo grado è un intervallo di valori che soddisfano la relazione. Questo intervallo può essere rappresentato sulla retta reale.

# Esempi

$$\frac{5x-7}{2} - 3x + 14 = \frac{2x+7}{3}$$
$$\frac{15x-21-18x+84}{6} = \frac{4x+14}{6}$$
$$-3x + 63 = 4x + 14$$
$$-3x - 4x = -63 + 14$$
$$-7x = -49$$
$$7x = 49$$
$$x = 49/7$$
$$x = 7$$

$$4(x+2)(x-3) - x(x+1) < 3x(x-2) + 5$$
$$4 \cdot (x^2 - 3x + 2x - 6) - x^2 - x < 3x^2 - 6x + 5$$
$$4x^2 - 12x + 8x - 24 - x^2 - x < 3x^2 - 6x + 5$$
$$\cancel{3x^2}^0 - 5x - \cancel{3x^2}^0 + 6x < 24 + 5$$
$$x < 29$$

$$-7x + 11 - (x+1)^2 > -x^2 + 2x - 3(x+2)$$
$$-7x + 11 - (x^2 + 2x + 1) > -x^2 + 2x - 3x - 6$$
$$-7x + 11 - x^2 - 2x - 1 > -x^2 + 2x - 3x - 6$$
$$-7x - 2x - 2x + 3x > -11 + 1 - 6$$
$$-8x > -16$$
$$x < 2$$

# Equazioni Irrazionali

Definizione	Le equazioni irrazionali sono equazioni che contengono espressioni con radicali.
Definizione delle Condizioni di Esistenza dei radicali	Nel caso di radici di indice pari, l'argomento di ciascun radicale dev'essere sempre maggiore o uguale a zero, perciò si perviene ad una condizione di esistenza che va confrontata con la soluzione trovata.
Condizione di Concordanza del Segno	Nel caso di radici di indice pari, la soluzione della radice è, per convenzione, quella positiva. Per questo motivo, il secondo membro dell'equazione (quello senza radicale) dovrà essere positivo o maggiore di zero. Questa condizione dovrà essere messa a sistema con quella del punto precedente per ottenere le condizioni di esistenza dell'equazione.
Strategia di Risoluzione	La strategia di risoluzione prevede di eliminare i radicali, elevando entrambi i membri dell'equazione a una potenza appropriata, per poi risolvere l'equazione risultante.
Verifica delle Soluzioni	Una volta trovate le soluzioni, è necessario verificare che soddisfino le condizioni di esistenza dell'equazione.

# Esempio

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+7}$$

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -7 \end{cases}$$

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (\sqrt{x+7})^2$$

$$2x + 2\sqrt{2x} + 1 = x + 7$$

$$2\sqrt{2x} = x + 7 - 2x - 1$$

$$2\sqrt{2x} = -x + 6$$

$$-x + 6 \geq 0 \longrightarrow -x \geq -6 \longrightarrow x \leq 6$$

Condizione di esistenza:  $x \geq 0$

Condizione di concordanza del segno:  $x \leq 6$

Condizione totale:  $0 \leq x \leq 6$

$$(2\sqrt{2x})^2 = (-x + 6)^2$$

$$4 \cdot 2x = x^2 - 12x + 36$$

$$8x = x^2 - 12x + 36$$

$$8x - x^2 + 12x - 36 = 0$$

$$-x^2 + 20x - 36 = 0$$

$$x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$(x - 18)(x - 2) = 0$$

$$x - 18 = 0 \longrightarrow x = 18$$

$$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$$