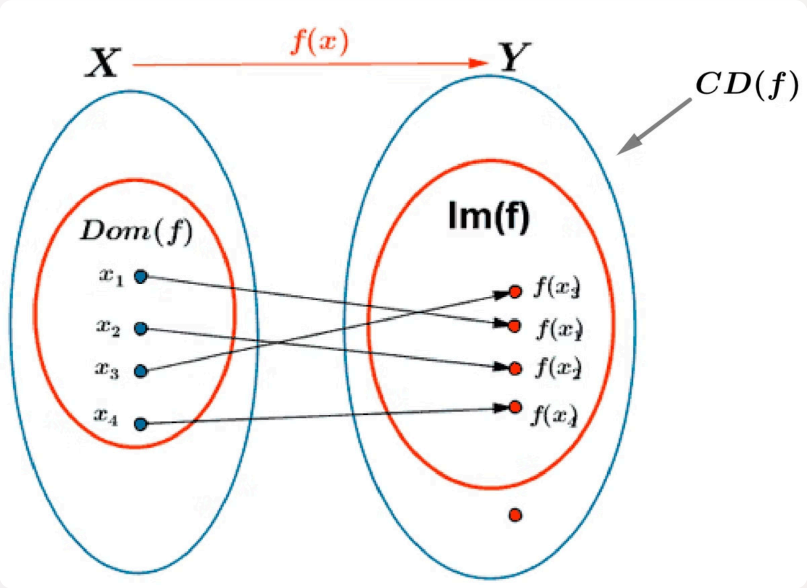
FUNZIONI

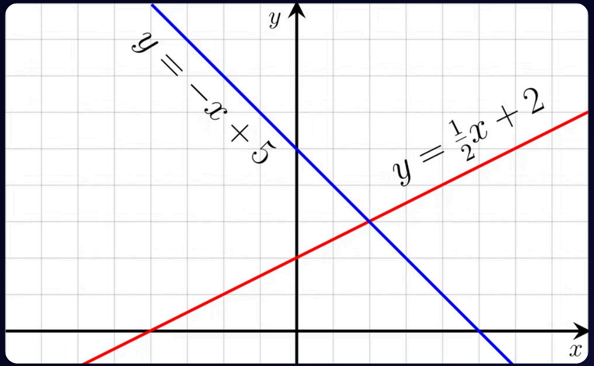
Una funzione è una relazione matematica tra due insiemi, solitamente chiamati **dominio** e **codominio**.

In una funzione, a ogni elemento del dominio è associato uno e un solo elemento del codominio. Questo legame univoco tra gli elementi dei due insiemi costituisce il concetto fondamentale di funzione matematica.

Le funzioni possono essere espresse in forma analitica, come ad esempio tramite equazioni o espressioni algebriche, e possono essere rappresentate graficamente, mostrando il loro comportamento attraverso un grafico cartesiano. Le funzioni sono ampiamente utilizzate in diversi campi della matematica e delle scienze, come l'analisi matematica e la fisica.

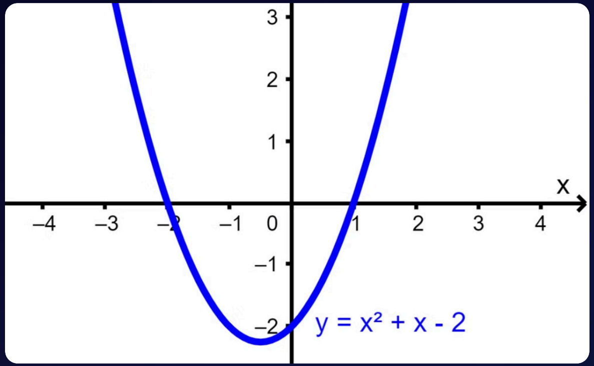


Esempi di funzioni



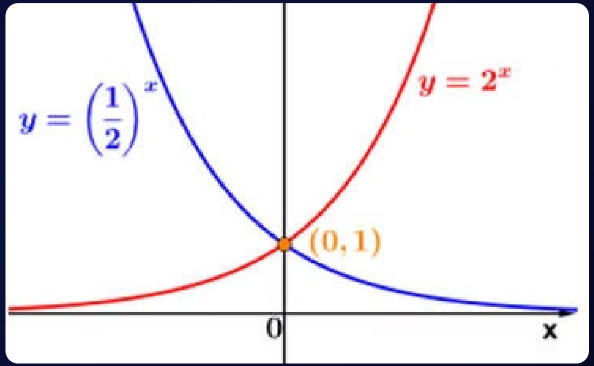
Funzione Lineare

La funzione lineare descrive una relazione proporzionale tra due variabili, dove una variabile cambia in modo costante rispetto all'altra. Esempi di funzioni lineari includono la velocità di un veicolo in funzione del tempo o il costo di un articolo in funzione della quantità acquistata.



Funzione Quadratica

La funzione quadratica presenta un andamento parabolico. Essa trova applicazioni in numerosi campi, come la fisica (moto parabolico), l'economia (costo di produzione) e la matematica stessa (ottimizzazione).



Funzione Esponenziale

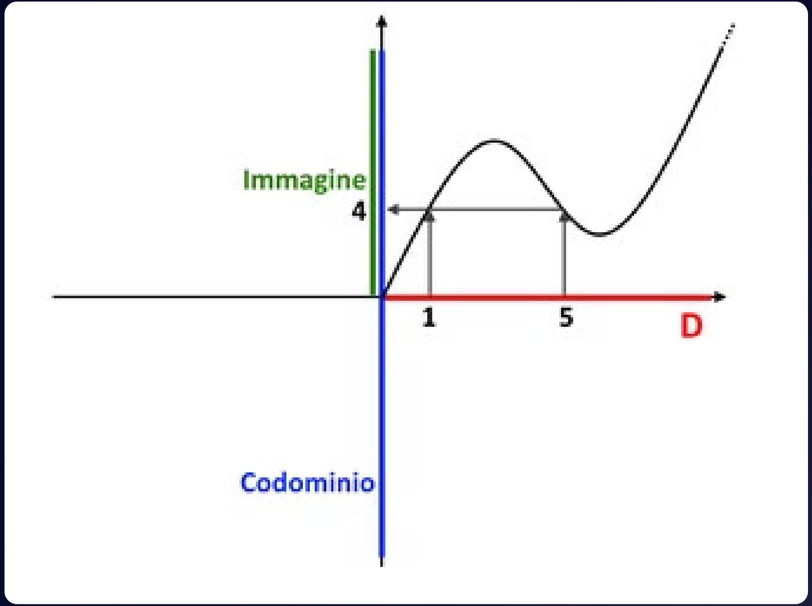
La funzione esponenziale descrive una crescita o un decadimento rapidamente variabile. Essa è fondamentale in numerosi fenomeni naturali e scientifici, come la popolazione batterica, il decadimento radioattivo e la crescita di investimenti finanziari.

Dominio, Codominio e Insieme Immagine

Il **Dominio** di una funzione è un concetto fondamentale nell'analisi matematica. Esso descrive l'insieme di valori per i quali la funzione è realmente definita e può quindi essere calcolata. La corretta determinazione del dominio è essenziale per comprendere il comportamento e le proprietà di una funzione.

Il **Codominio** di una funzione rappresenta invece l'insieme di tutti i possibili valori che la funzione può assumere come output. Mentre il dominio è l'insieme di partenza, il codominio è l'insieme di arrivo per la funzione.

L'insieme **Immagine** di una funzione rappresenta invece l'insieme di tutti i valori effettivamente raggiunti dalla funzione nel suo codominio. In altre parole, è l'insieme di tutti i possibili output ottenibili dalla funzione.

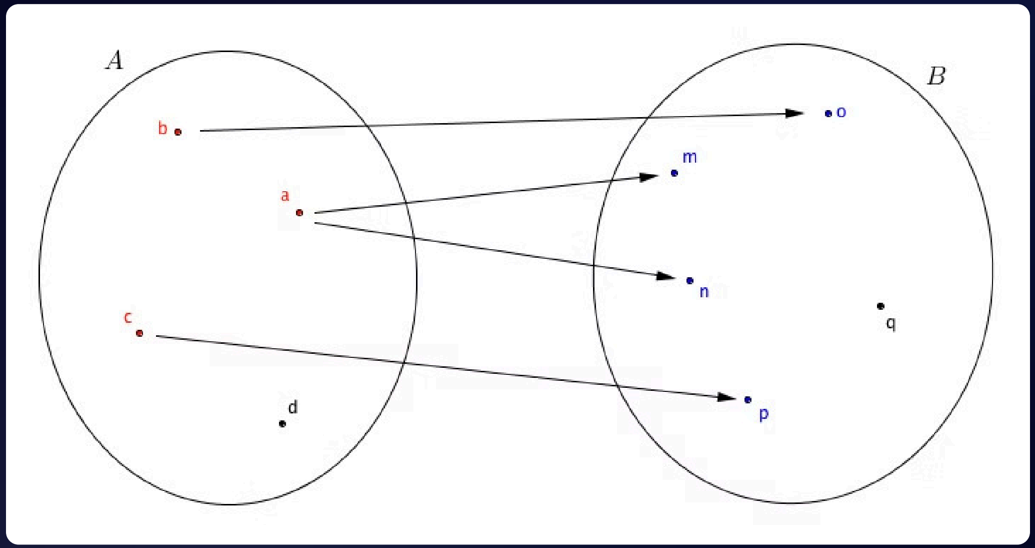


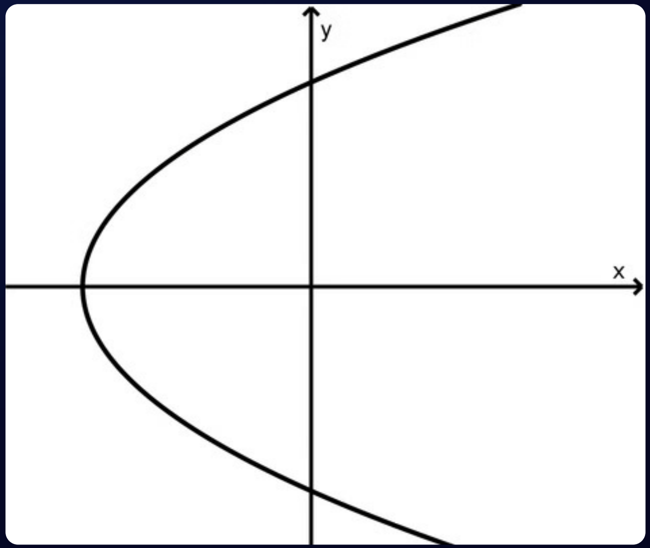
Esempi di relazioni che non sono funzioni

Una relazione che non è una funzione è quella in cui un elemento del dominio è associato a più elementi dell'insieme di arrivo. Ad esempio, la relazione "fratello di" non è una funzione perché una persona può avere più fratelli.

Un'altra tipologia di relazione che non è una funzione è quella in cui ad un elemento del dominio corrispondono più elementi dell'insieme di arrivo. Ad esempio, la relazione "essere divisore di" non è una funzione perché un numero può avere più divisori.

Il grafico di una relazione che non è una funzione avrà più di un punto per lo stesso valore del dominio. Questo significa che non soddisfa la condizione di unicità dell'immagine per ogni elemento del dominio.



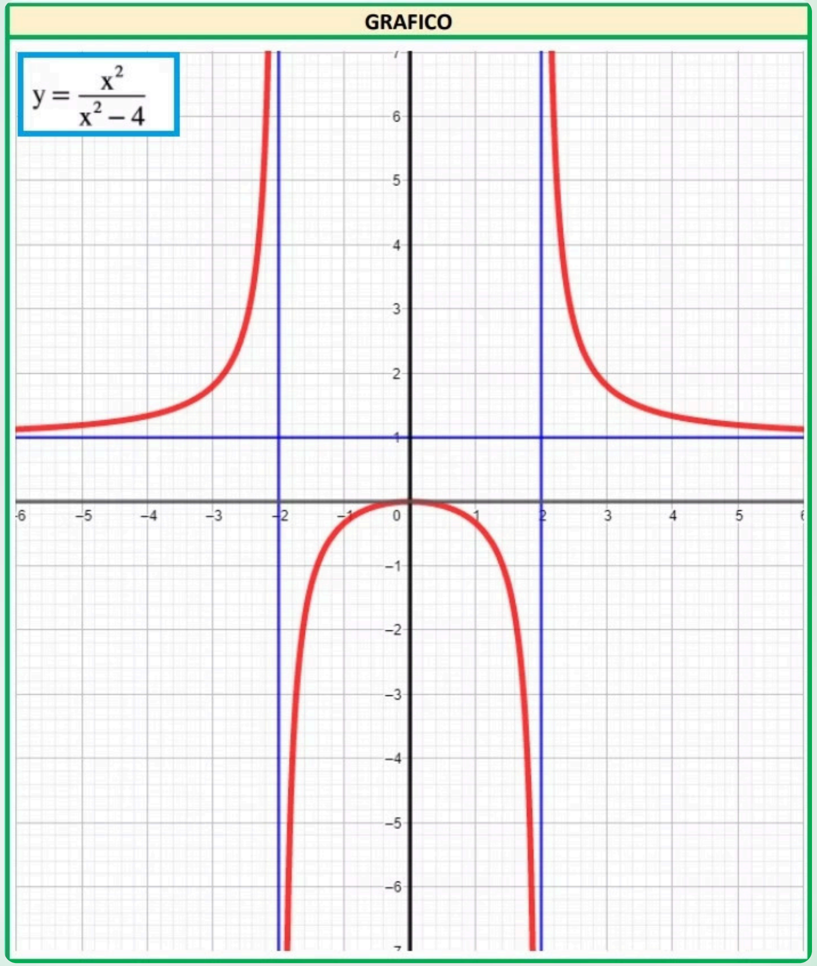


Esempio: Dominio di una funzione frazionaria

Il dominio di una funzione frazionaria è l'insieme di tutti i valori di x per i quali il denominatore della frazione è diverso da zero. Ciò significa che il dominio esclude tutti i valori di x che renderebbero il denominatore uguale a zero, poiché in quel caso la funzione non sarebbe definita.

Ad esempio, sia data la seguente a destra. Il dominio sarebbe l'insieme dei numeri reali esclusi i valori x = ±2, poiché questi renderebbero il denominatore uguale a zero e la funzione non sarebbe definita in quel punto.

La funzione, inoltre, si annulla per x = 0 (quando si annulla il numeratore) e solo per questo valore la funzione interseca l'asse delle ascisse.



Esempio: Dominio di una funzione irrazionale

Le funzioni irrazionali sono quelle funzioni matematiche in cui il dominio è composto da valori per i quali l'espressione sotto il segno di radice di indice pari è non negativa. Ciò significa che il dominio di una funzione irrazionale è dato dall'insieme dei numeri reali per i quali il valore sotto il radicale è maggiore o uguale a zero.

Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt{(x-2)}$ ha come dominio l'insieme dei numeri reali x tali che $x \geq 2$, in quanto per valori di x inferiori a 2 il valore sotto il radicale risulterebbe negativo, rendendo la funzione non definita.

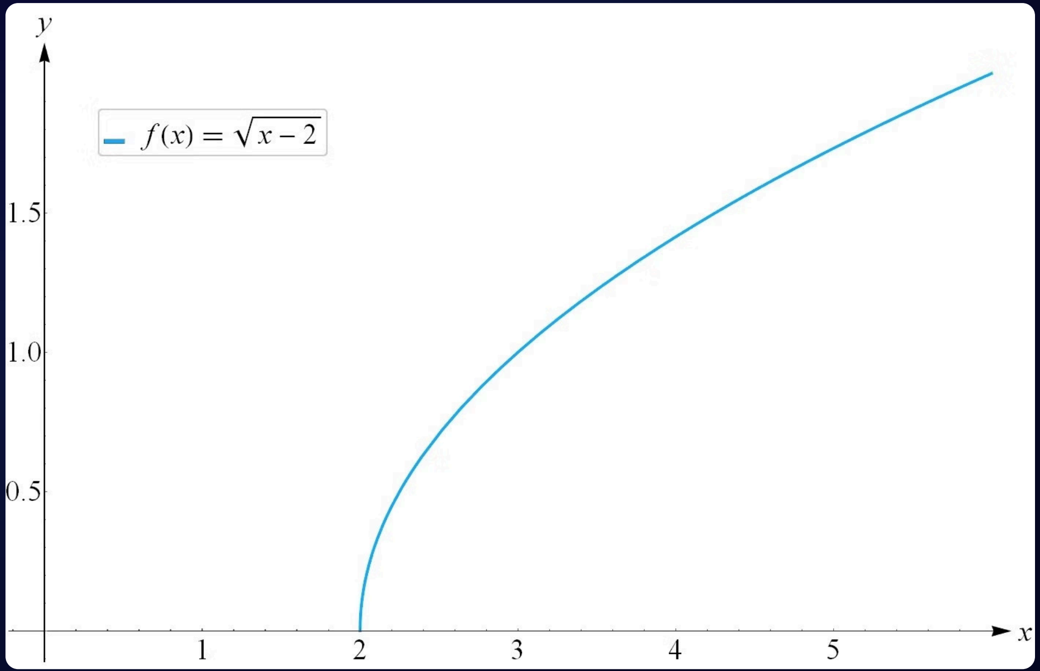


Grafico di una funzione

Il grafico di una funzione è la rappresentazione visuale della relazione tra i valori di input (dominio) e i corrispondenti valori di output (codominio). Il grafico può essere disegnato su un piano cartesiano, dove l'asse orizzontale rappresenta il dominio e l'asse verticale rappresenta il codominio.

Attraverso il grafico, è possibile visualizzare le caratteristiche della funzione, come il suo andamento (crescente, decrescente, costante), i punti di intersezione con gli assi, i valori massimi e minimi, e altro ancora. Il grafico fornisce quindi una rappresentazione intuitiva e immediata del comportamento della funzione.

Composizione di due funzioni

Definizione

La composizione di due funzioni, indicata con $f(g(x))$, è un'operazione matematica in cui la funzione esterna f viene applicata al risultato della funzione interna g. In altre parole, si esegue prima g e poi si applica f al risultato.

Esempio

Siano:

$f(x) = x^2$

$g(x) = x+3$.

Allora la composizione:

$f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2$.

Proprietà

La composizione di funzioni gode di importanti proprietà, come l'associatività e il fatto che l'inversa di una composizione è la composizione degli inversi (se esistono). Queste proprietà sono fondamentali in molti ambiti matematici e applicativi.

Funzioni inverse

Una funzione inversa è una relazione tra due insiemi in cui ogni elemento dell'insieme di partenza è associato in modo univoco a un elemento dell'insieme di arrivo, e viceversa. In altre parole, una funzione inversa "scambia" gli elementi di dominio e codominio della funzione originale.

Le funzioni inverse hanno proprietà interessanti:

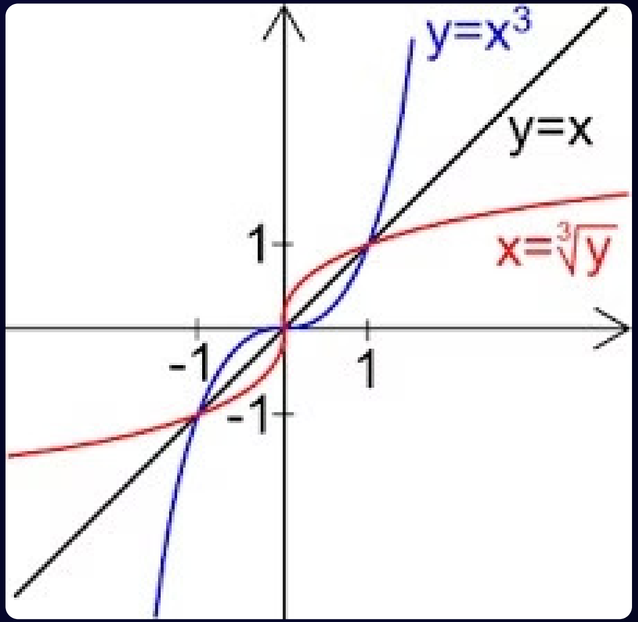
se f(x) = y, allora f^-1(y) = x.

Le funzioni inverse annullano l'effetto della funzione originale, e viceversa.

Esempi di funzioni inverse sono:

funzione esponenziale e funzione logaritmica, funzione seno e funzione arcoseno, funzione coseno e funzione arcocoseno.

Trovare la funzione inversa di una data funzione può essere utile in molti contesti matematici e applicativi.



Funzioni monotone

Definizione

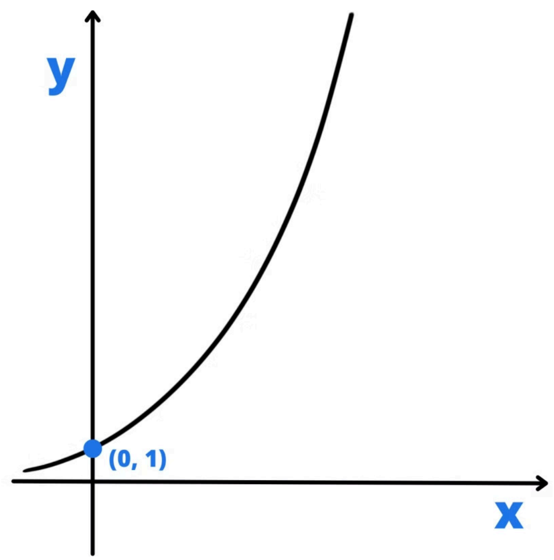
Le funzioni monotone sono un tipo particolare di funzioni caratterizzate da un andamento costantemente crescente o costantemente decrescente all'interno del loro dominio.

Crescenti

Una funzione f(x) è detta monotona crescente se, per ogni coppia di valori x1 e x2 nel dominio della funzione, con x1 minore di x2, la corrispondente coppia di valori f(x1) e f(x2) è tale per cui f(x1) è minore di f(x2).

Decrescenti

Una funzione f(x) è detta monotona decrescente se, per ogni coppia di valori x1 e x2 nel dominio della funzione, con x1 minore di x2, la corrispondente coppia di valori f(x1) e f(x2) è tale per cui f(x1) è maggiore di f(x2).



Funzioni pari e dispari

Funzioni pari

Le funzioni pari sono quelle che soddisfano la condizione:

$f(x) = f(-x)$

per tutti i valori di x nel dominio della funzione. Ciò significa che il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y.

Funzioni dispari

Le funzioni dispari soddisfano la condizione:

$f(x) = -f(-x)$

per tutti i valori di x nel dominio della funzione. Ciò significa che il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del piano cartesiano.

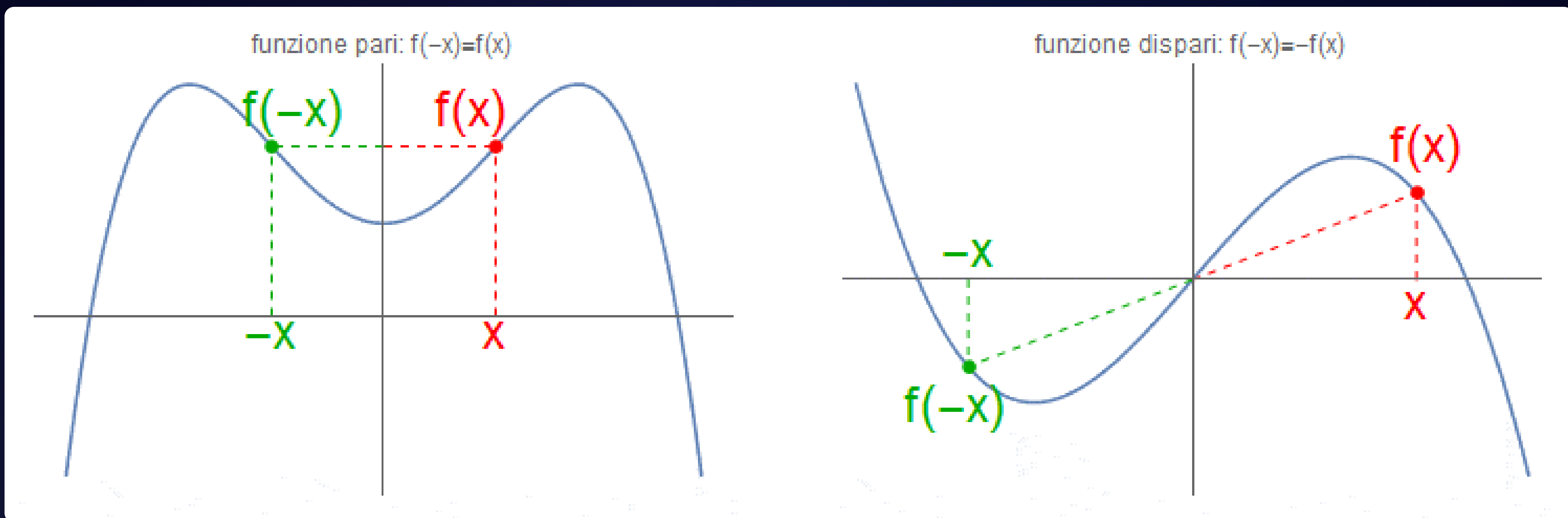
Esempi

Alcune funzioni elementari sono pari, come la funzione quadratica:

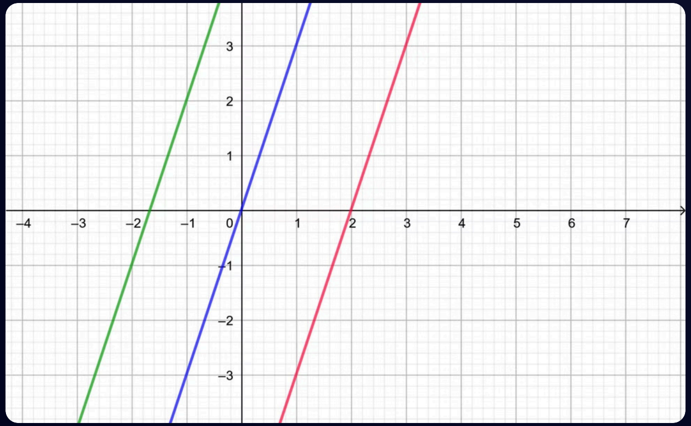
$f(x) = x^2$

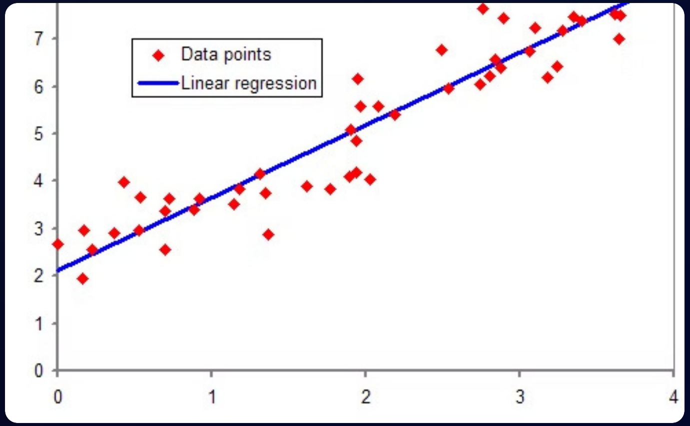
Altre sono dispari, come la funzione cubica:

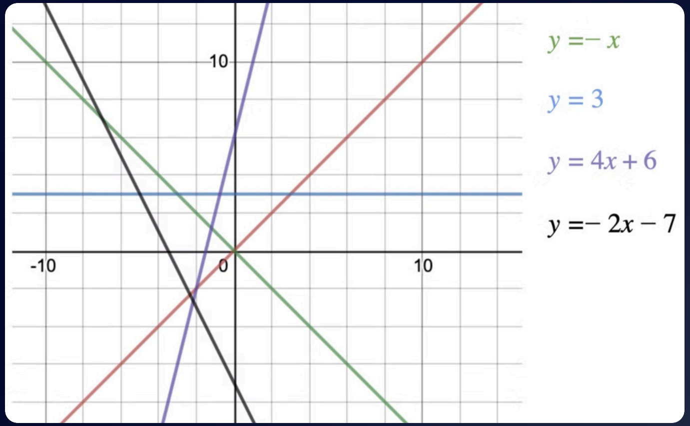
$f(x) = x^3$



Funzioni lineari







Definizione

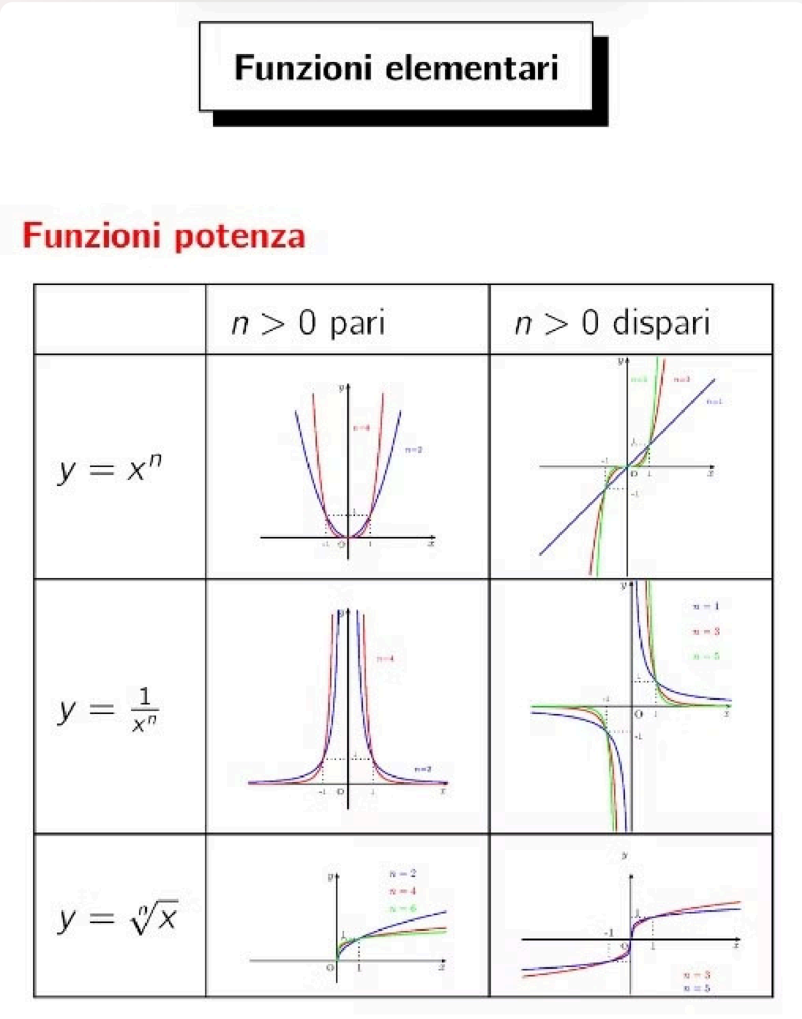
Le funzioni lineari sono una classe fondamentale di funzioni matematiche. Sono caratterizzate dalla presenza di un solo termine di grado 1 e possono essere rappresentate graficamente attraverso una linea retta. La loro espressione analitica è data dalla formula y = mx + q, dove m rappresenta il coefficiente angolare e q l'intercetta sull'asse y.

Applicazioni pratiche

Le funzioni lineari trovano ampia applicazione in numerosi contesti, dalla fisica alla economia. Ad esempio, possono descrivere la relazione tra il costo di un servizio e la quantità acquistata, oppure la dipendenza tra la velocità di un veicolo e il tempo impiegato per percorrere una distanza. Grazie alla loro semplicità e linearità, sono uno strumento essenziale per la modellizzazione matematica di fenomeni reali.

Proprietà grafiche

Le funzioni lineari presentano alcune proprietà geometriche caratteristiche: il grafico è sempre una retta, il dominio e l'insieme immagine coincidono con l'intera retta reale.



Funzioni potenza

Definizione

Le funzioni potenza sono un tipo di funzione matematica in cui la variabile indipendente è elevata a una potenza fissa. La forma generale di una funzione potenza è:

f(x) = x^n

dove n è un numero reale.

Se n è negativo, il numero NON cambia segno, ma si inverte.

Proprietà

Le funzioni potenza hanno proprietà interessanti, come il fatto che se n è un numero intero positivo, la funzione è crescente per n > 0 e decrescente per n < 0. Inoltre, se n è un numero pari, la funzione è pari, mentre se n è dispari, la funzione è dispari.

Applicazioni

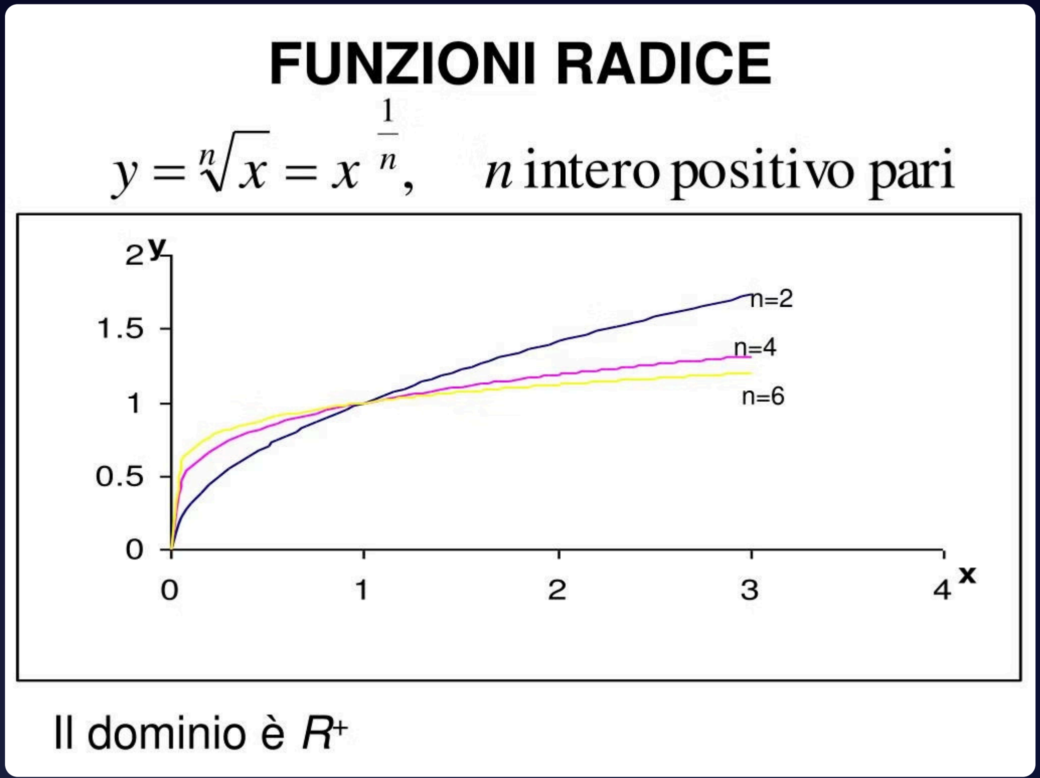
Le funzioni potenza trovano applicazioni in molti ambiti, come la fisica, l'economia e l'ingegneria. Ad esempio, la legge di gravitazione universale di Newton può essere espressa come una funzione potenza, e le funzioni di produzione in economia spesso seguono una forma funzionale potenza.

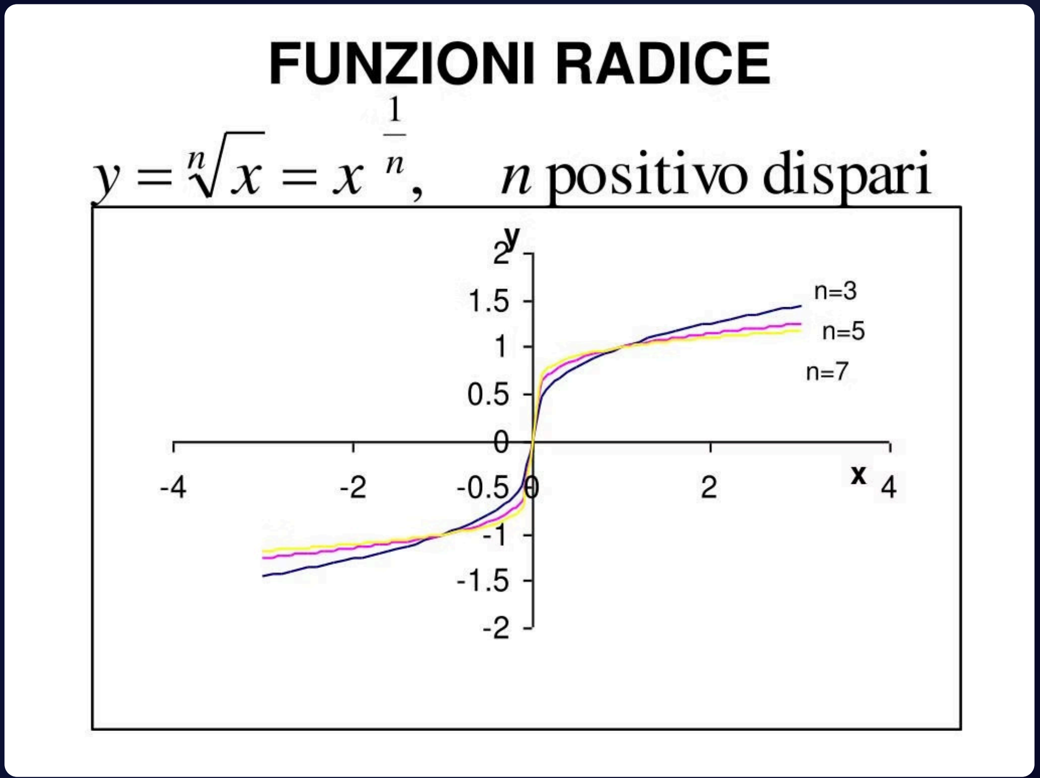
Funzione radice n-esima

Le funzioni radice n-esima sono un tipo speciale di funzione in cui la variabile indipendente è elevata a una potenza frazionaria.

La loro forma generale è f(x) = x^(1/n), dove n è un numero intero positivo maggiore di 0.

Inoltre, queste funzioni godono delle stesse proprietà delle funzioni potenza, in quanto esse sono sostanzialmente funzioni potenza con esponente frazionario.



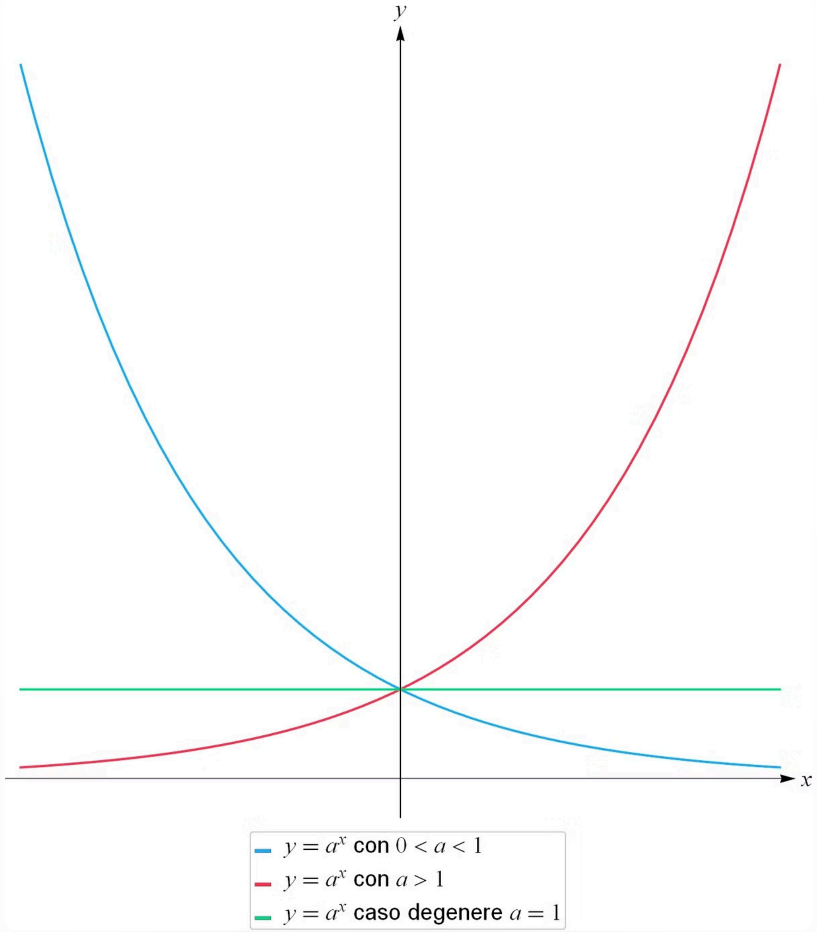


Funzioni esponenziali

Le funzioni esponenziali sono caratterizzate da una crescita o decrescita rapida e costante. Hanno la forma f(x) = a^x, dove a è una costante positiva diversa da 1. Sono fondamentali in molti campi, dalla fisica alla biologia, per modellare fenomeni che crescono o decrescono in modo esponenziale.

Il grafico di una funzione esponenziale è una curva che passa per l'origine e cresce o decade in modo sempre più ripido al crescere del valore di x. La curvatura del grafico dipende dal valore della costante a: maggiore è a, più ripida è la curva.

Le funzioni esponenziali trovano molteplici applicazioni in ambiti come la crescita della popolazione, il decadimento radioattivo, la diffusione di epidemie, la crescita di investimenti finanziari e il calcolo degli interessi composti. Comprendere il comportamento di queste funzioni è essenziale per analizzare e prevedere fenomeni reali.



Funzioni logaritmiche

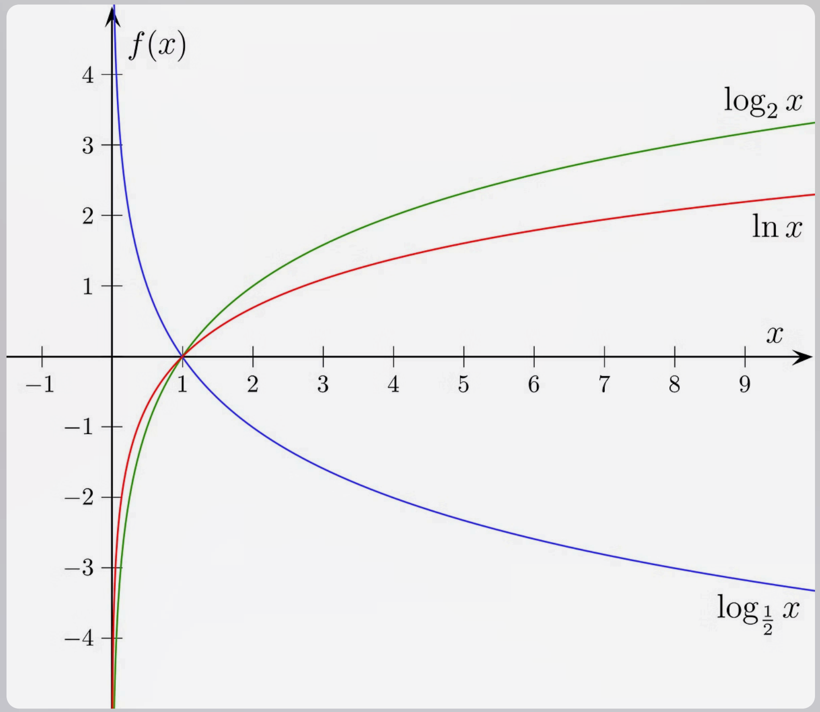
Le funzioni logaritmiche sono funzioni inverse delle funzioni esponenziali. Esse rappresentano l'esponente a cui è necessario elevare la base della funzione esponenziale per ottenere un determinato valore in input.

Le funzioni logaritmiche hanno proprietà interessanti, come la proprietà additiva e moltiplicativa, che le rendono molto utili in analisi matematica e applicazioni pratiche. Inoltre, sono funzioni monotone crescenti, il che le rende facilmente interpretabili graficamente.

Le funzioni logaritmiche trovano ampia applicazione in diversi ambiti, come la finanza (per il calcolo degli interessi), la fisica (per la scala logaritmica di decibel), l'informatica (per la misura delle prestazioni dei computer) e la biologia (per la misurazione della crescita di popolazioni).

I grafici delle funzioni logaritmiche hanno una forma caratteristica, con un'asintoto verticale sull'asse y e un andamento crescente ma sempre più lento all'aumentare del valore in input. Questa forma conferisce alle funzioni logaritmiche proprietà uniche e molto utili.

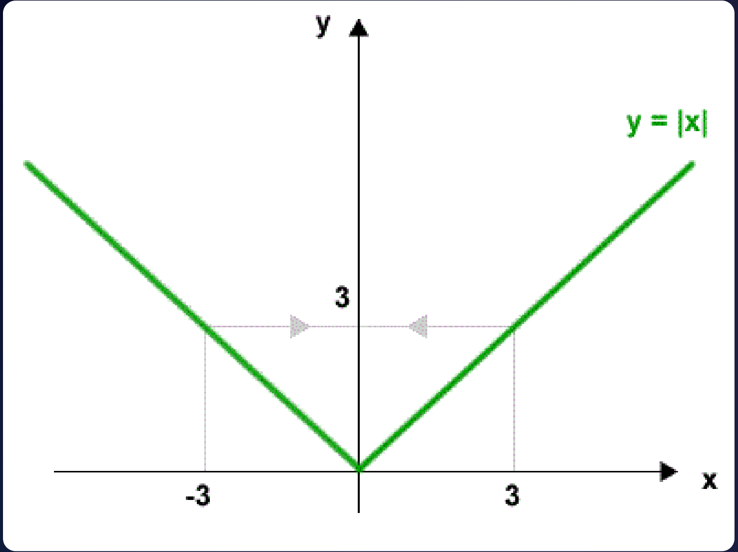
La funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale.



Il valore assoluto e la sua funzione

La **funzione valore assoluto** è una funzione matematica che associa a ogni numero reale il suo valore assoluto (i.e. il valore numerico positivo senza il segno). La funzione valore assoluto può essere rappresentata graficamente come una V rovesciata con l'asse y come asse di simmetria.

$$y = |x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



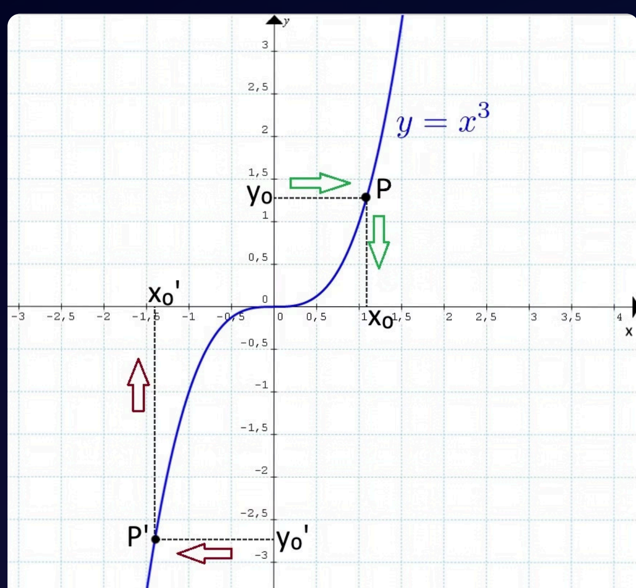
Il grafico della funzione valore assoluto è a forma di **V** con il vertice sull'origine degli assi cartesiani. Questa funzione è **continua** e **dispari**, il che significa che f(x) = -f(-x) per ogni x reale.

Il valore assoluto ha molte applicazioni pratiche, ad esempio nella misurazione di distanze, valori monetari e altre grandezze in cui l'orientamento del segno non è rilevante. È uno strumento matematico fondamentale per descrivere e analizzare fenomeni del mondo reale ed è spesso utilizzata in problemi di ottimizzazione e programmazione.

Suriettività, Iniettività e biettività

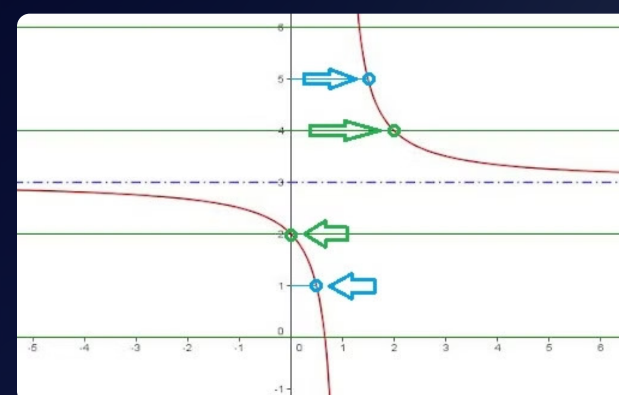
Suriettività

La suriettività delle funzioni implica che per ogni valore in output, esiste almeno un valore in input che produce quel risultato. L'insieme immagine coincide con il codominio. In parole povere, le ordinate dei punti della funzione coprono tutto l'insieme dei numeri reali.



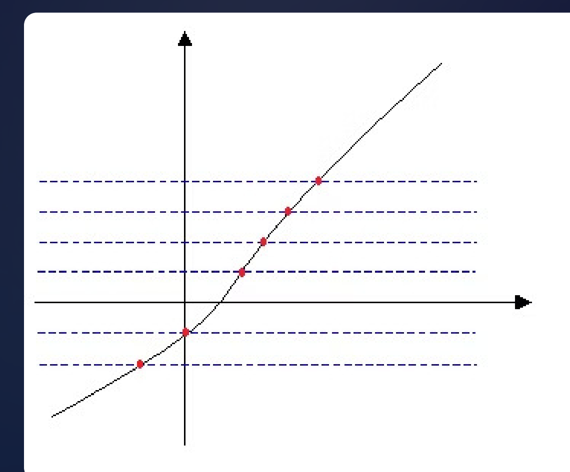
Iniettività

L' iniettività garantisce che ad ogni elemento dell'insieme immagine corrisponda un solo elemento del dominio. In parole povere, non vi possono essere punti diversi con la medesima ordinata.



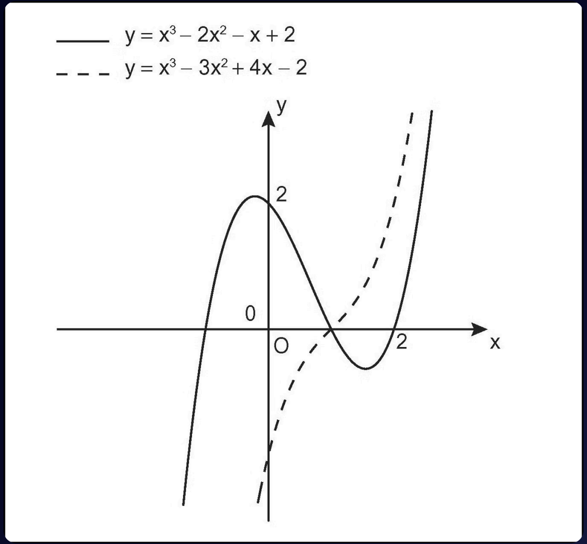
Biiettività

Infine, la biiettività combina le proprietà di suriettività e iniettività, permettendo di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i valori di input e di output.



Esempi

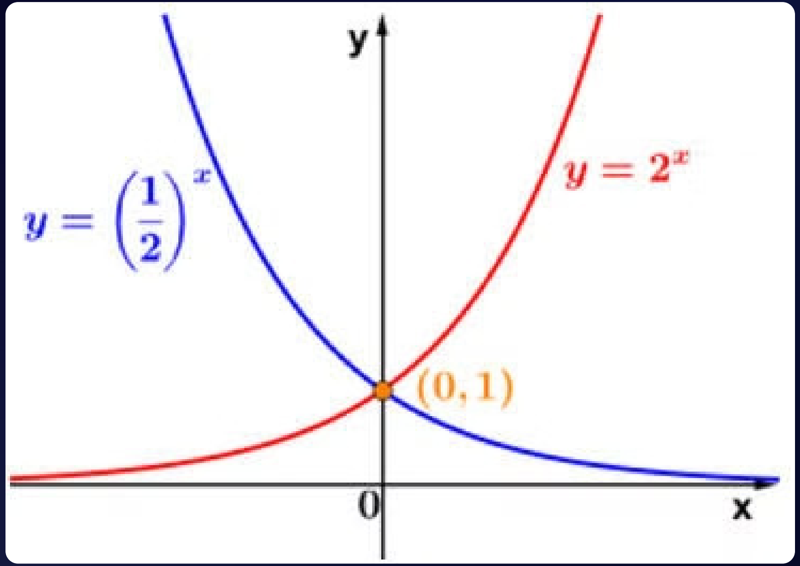
Funzioni cubiche



— : suriettiva ma non iniettiva

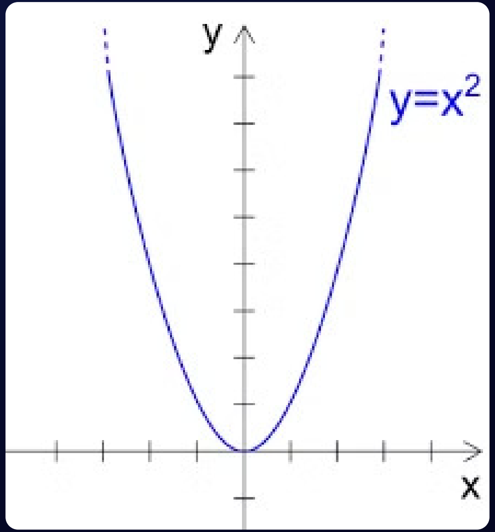
- - : suriettiva e iniettiva (biettiva)

Funzione esponenziale



iniettive ma non suriettive

Funzioni paraboliche



né suriettiva né iniettiva