CALCOLO COMBINATORIO

Il calcolo combinatorio è una branca della matematica che studia le possibilità di combinare oggetti in modo sistematico. Questa disciplina è fondamentale per comprendere e risolvere problemi riguardanti le permutazioni, le disposizioni e le combinazioni, che hanno innumerevoli applicazioni in campi come la statistica, l'informatica, la fisica e l'economia.

L'insieme di partenza, formato da n elementi, prende il nome di **universo**.

Gli n elementi dell'universo possono essere opportunamente combinati per ottenere dei sottogruppi di k elementi. In questo caso si parla di universo di n elementi di ordine k.

Nel combinare questi elementi possiamo ammettere che sia o meno ammessa la **ripetizione** di alcuni elementi.

La formazione dei sottogruppi potrà infine tenere conto o meno dell'**ordine** dei k elementi stessi all'interno di ognuno di essi, in modo che gruppi formati da stessi k elementi ma disposti in ordine differente siano da considerarsi effettivamente diversi o meno ai fini del calcolo combinatorio.

Permutazioni

Permutazioni semplici

Le permutazioni sono l'insieme di tutte le possibili disposizioni di n elementi, tenendo conto dell'ordine. In altre parole, una permutazione è una sequenza ordinata di n elementi, in cui ogni elemento compare una sola volta.

La formula per calcolare il numero di permutazioni di n elementi è:

$$P_n = n!$$

Ad esempio, le permutazioni di 3 elementi, ad esempio {a, b, c}, sono: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Il numero totale di permutazioni è P(6) = 3! = 6.

Permutazioni con ripetizione

Se gli elementi non sono tutti distinti, la formula si modifica:

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}$$

dove n1, n2, ..., nk sono le molteplicità degli elementi.

Ad esempio, la parola BANANA è formata da n=6 elementi con la ripetizione di 3 A e 2 N.

I possibili anagrammi sono PR(6) = 6! / (3!×2!) = 60

Disposizioni

Disposizioni semplici

Le disposizioni sono l'insieme di tutte le possibili selezioni di k elementi da un insieme di n elementi, tenendo conto dell'ordine. La formula per calcolare il numero di disposizioni di k elementi da un insieme di n elementi è:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ad esempio, le disposizioni di 2 elementi da un insieme di 3 elementi, {a, b, c}, sono: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Il numero totale di disposizioni è D(3,2) = 6.

Disposizioni con ripetizione

Le disposizioni con ripetizione sono l'insieme di tutte le possibili selezioni di k elementi da un insieme di n elementi, permettendo che un elemento possa essere selezionato più volte. La formula per calcolare il numero di disposizioni con ripetizione di k elementi da un insieme di n elementi è:

$$D'_{n,k} = n^k$$

Ad esempio, le disposizioni con ripetizione di 2 elementi da un insieme di 3 elementi, {a, b, c}, sono: aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.

Il numero totale di disposizioni è DR(3,2) = 9.

Combinazioni

Combinazioni semplici

Le combinazioni sono l'insieme di tutte le possibili selezioni di k elementi da un insieme di n elementi, senza tenere conto dell'ordine. In altre parole, una combinazione è un sottoinsieme di k elementi scelti da un insieme di n elementi. La formula per calcolare il numero di combinazioni di k elementi da un insieme di n elementi è:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \boxed{\binom{n}{k}} \quad \text{Coefficiente binomiale}$$

Ad esempio, le combinazioni di 2 elementi da un insieme di 3 elementi, {a, b, c}, sono: {a,b}, {a,c}, {b,c}.

Il numero totale di combinazioni è C(3,2) = 3.

Combinazioni con ripetizione

Le combinazioni con ripetizione possono verificarsi quando si sceglie un numero di elementi k da un insieme di n elementi, permettendo la possibilità di scegliere lo stesso elemento più volte. La formula per calcolare il numero di combinazioni con ripetizione è simile a quella delle combinazioni senza ripetizione, ma viene aggiunto un termine per tener conto delle ripetizioni.

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Ad esempio, le combinazioni con ripetizione di 2 elementi da un insieme di 3 elementi, {a, b, c}, sono: {a,a}, {a,b}, {a,c}, {b,b}, {b,c}, {c,c}. Il numero totale di combinazioni con ripetizione è CR(3,2) = 6.

Esempi di calcolo di permutazioni

1 Permutazioni di parole

Calcolare il numero di permutazioni della parola "CANE". La parola contiene 4 lettere distinte, quindi la formula è:

$P(4) = 4! = 24$.

Le 24 permutazioni sono: CANE, CAEN, CEAN, CECA, ECNA, ECAN, ENCA, CNAE, CENA, NACE, NAEC, NEAC, NECA, AECN, ACEN, ACNE, AENC, AENC, AENC, AENC, AENC, AENC, AENC, AENC.

2 Permutazioni con ripetizione

Calcolare il numero di permutazioni della parola "BANANA". La parola contiene 6 lettere, di cui 1 B, 3 A e 2 N.

La formula diventa: $P(6) = 6! / (1! * 3! * 2!) = 60$.

Alcune delle 60 permutazioni sono: BANANA, BAAANN, ANBANA, BABANA, NAAABB, AANBAN.

3 Permutazioni circolari

Calcolare il numero di permutazioni circolari di 4 elementi. Una permutazione circolare è una sequenza in cui l'ultimo elemento è considerato adiacente al primo, come nel caso di commensali seduti ad un tavolo circolare.

La formula è: $P = n!/n = (n-1)!$

Perciò, nel caso di quattro commensali, si ha un numero di permutazioni $P(4) = 3! = 6$.

Infatti, le possibili permutazioni sono: ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB. Questo perché, ad esempio, le permutazioni BCDA e ABCD sono, in questo caso, equivalenti.

Esempi di calcolo di disposizioni

1. **Disposizioni di 3 elementi da 5**

   Calcolare il numero di disposizioni di 3 elementi da un insieme di 5 elementi (A, B, C, D, E).

   La formula è: $D(5,3) = 5! / (5-3)! = 60$.

   Alcune delle 60 disposizioni sono: ABC, ABD, ABE, ACB, ACD, ACE, ADE, BAC, BAD, BAE, BCA, BCD, BCE, BDE, CAB, CAD, CAE, CBA, CBD, CBE, CDE, DAB, DAC, DAE, DBA, DBC, DCB, DCE, EAB, EAC, EAD, EBA, EBC, EBD, ECA, ECB, ECD.

2. **Disposizioni con ripetizione**

   Calcolare il numero di disposizioni con ripetizione di 3 elementi da un insieme di 4 elementi (A, B, C, D).

   La formula è $D(4,3) = 4^3 = 64$.

   Alcune delle 64 disposizioni sono: AAA, AAB, AAC, AAD, ABA, ABB, ABC, ABD, ACA, ACB, ACC, ACD, ADA, ADB, ADC, ADD.

Esempi di calcolo di combinazioni

1

Combinazioni di 3 elementi da 6

Calcolare il numero di combinazioni di 3 elementi da un insieme di 6 elementi (A, B, C, D, E, F).

La formula è: $C(6,3) = 6! / (3!(6-3)!) = 20$.

Alcune delle 20 combinazioni sono: {A,B,C}, {A,B,D}, {A,B,E}, {A,B,F}, {A,C,D}, {A,C,E}, {A,C,F}, {A,D,E}, {A,D,F}, {A,E,F}, {B,C,D}, {B,C,E}, {B,C,F}, {B,D,E}, {B,D,F}, {B,E,F}, {C,D,E}, {C,D,F}, {C,E,F}, {D,E,F}.

2

Combinazioni con ripetizione

Calcolare il numero di combinazioni con ripetizione di 3 elementi da un insieme di 4 elementi (A, B, C, D).

La formula è: $C(4+3-1,3) = C(6,3) = 20$.

Alcune delle 20 combinazioni sono: {A,A,A}, {A,A,B}, {A,A,C}, {A,A,D}, {A,B,B}, {A,B,C}, {A,B,D}, {A,C,C}, {A,C,D}, {A,D,D}, {B,B,B}, {B,B,C}, {B,B,D}, {B,C,C}, {B,C,D}, {B,D,D}, {C,C,C}, {C,C,D}, {C,D,D}, {D,D,D}.

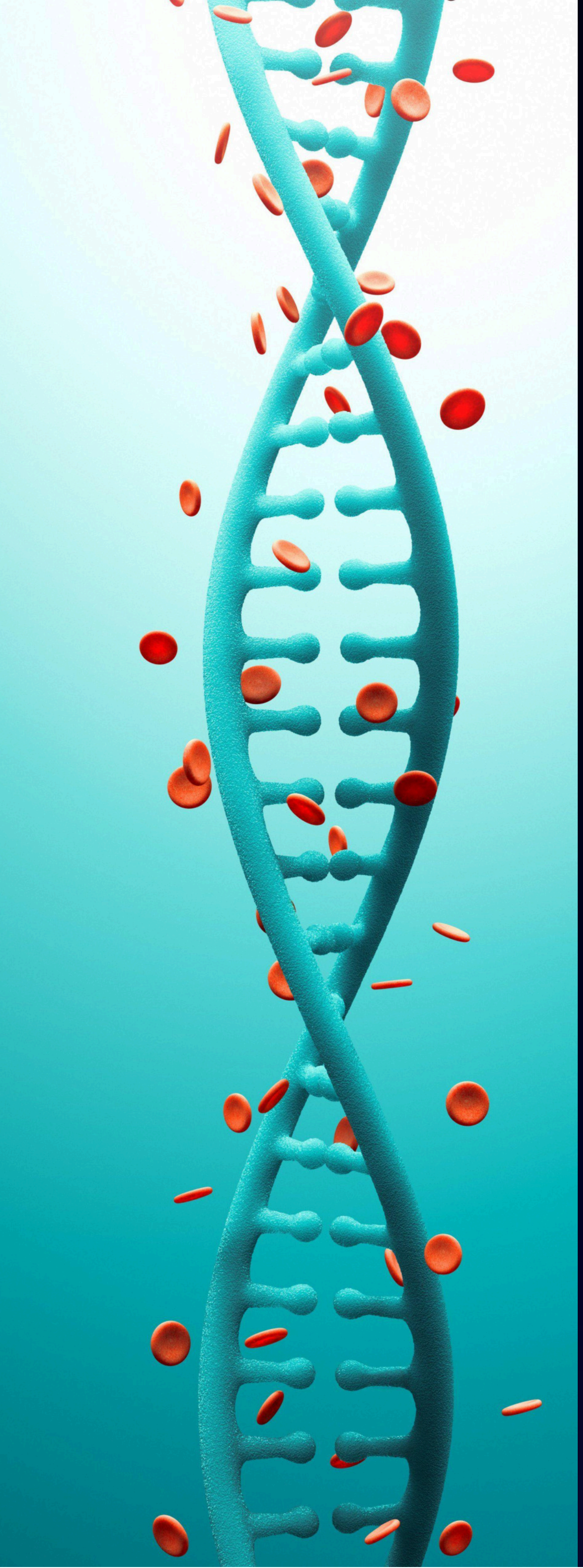
3

Combinazioni di insiemi

Calcolare il numero di combinazioni di 2 elementi da un insieme di 3 elementi {A,B,C} e di 3 elementi da un insieme di 5 elementi {1,2,3,4,5}.

Le combinazioni sono: {A,B}, {A,C}, {B,C} e {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,3,4}, {1,3,5}, {1,4,5}, {2,3,4}, {2,3,5}, {2,4,5}, {3,4,5}.

Il numero totale di combinazioni è $3 + 9 = 12$.



Applicazioni del calcolo combinatorio

Probabilità

Il calcolo combinatorio è fondamentale per il calcolo delle probabilità. Le formule per permutazioni, disposizioni e combinazioni permettono di determinare il numero di risultati possibili in esperimenti casuali, che è essenziale per calcolare le probabilità di eventi.

Informatica

Le tecniche di calcolo combinatorio trovano ampia applicazione in informatica, ad esempio nella progettazione di algoritmi efficienti, nella crittografia e nella teoria dei codici correttori di errore.

Genetica

In genetica, il calcolo combinatorio viene utilizzato per analizzare la trasmissione dei caratteri ereditari e per studiare le mutazioni geniche. Le formule delle combinazioni sono fondamentali per comprendere la diversità genetica.

Statistica

Nella statistica, il calcolo combinatorio è essenziale per la progettazione di esperimenti, il campionamento e l'analisi dei dati. Le formule permettono di determinare il numero di possibili campioni e di valutare la significatività statistica dei risultati.