La matematica delle credenze

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2024-25

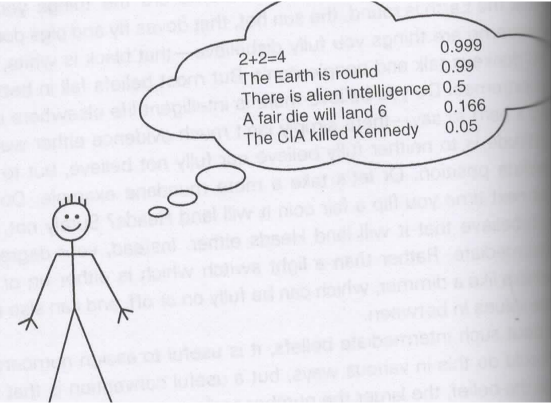
I gradi di credenza

- Molti di noi credono pienamente nel fatto che la Terra sia sferica, che le rondini volino e gli asini no; non credono per niente nel fatto che le uova siano cubiche, che gli asini parlino e le persone no.
- Molte credenze, tuttavia, cadono nel mezzo tra questi due estremi. Crediamo che ci sia vita intelligente fuori dalla Terra? Che uscirà testa quando lanceremo una monetina per aria?
- Sembra dunque plausibile ammettere che le nostre credenze abbiano dei *gradi*.

La misura dei gradi di credenza

- Se le credenze hanno dei gradi, pare naturale misurarle con dei *numeri*. Quali numeri usare?
- La supposizione che tali numeri formino un intervallo limitato sembra ragionevole. C'è un grado di credenza oltre il quale non possiamo andare: il grado di credenza che attribuiamo ad enunciati *certi*. C'è anche un grado di credenza al di sotto del quale non possiamo andare: il grado di credenza che attribuiamo ad enunciati *impossibili*.
- Per convenzione, i gradi di credenza vengono espressi mediante numeri reali compresi tra 0 e 1 (qualsiasi altro intervallo limitato di numeri reali andrebbe però bene).
- Scriviamo $C_{A,t}(H) = a$ per indicare che il grado di credenza nell'enunciato H dell'agente A al tempo t è a.
- Ad esempio, quando $A =$ Eva, $t =$ mezzogiorno del 01.10.2024, $H =$ "Il sole è sorto la mattina del 30.09.2024", $C_{A,t}(H) = 1$ esprime il fatto che Eva, a mezzogiorno del 01.10.2024, è certa del fatto che la mattina precedente il sole è sorto.

Le credenze di un agente



Possibilità e impossibilità

- H è *possibile* per A all'istante t se $C_{A,t}(H) > 0$;
- H è *impossibile* per A all'istante t se $C_{A,t}(H) = 0$.

Le credenze altrui (1)

- Ci capita spesso di pronunciare frasi quali "Giorgio crede che la sua ex moglie tornerà con lui". Anche supponendo di avere un accesso diretto alle nostre credenze, come facciamo ad attribuire credenze agli altri?
- Come avviene per gli enti non osservabili in fisica, tale attribuzione avviene in base agli effetti osservabili sul comportamento delle persone. Ad esempio, se Giorgio ci ha manifestato la sua convinzione e non abbiamo ragioni particolari per credere che voglia mentirci, è ragionevole attribuirgli la credenza in questione.

Le credenze altrui (2)

- Una fonte attendibile per attribuire credenze è il *comportamento di scommessa*. Supponiamo che un allibratore offra di pagare 100 Euro se il Cagliari vincerà la partita di domani, 0 Euro se perderà. Quanto è ragionevole pagare per poter partecipare alla scommessa?

Le credenze altrui (2)

- Una fonte attendibile per attribuire credenze è il *comportamento di scommessa*. Supponiamo che un allibratore offra di pagare 100 Euro se il Cagliari vincerà la partita di domani, 0 Euro se perderà. Quanto è ragionevole pagare per poter partecipare alla scommessa?
- Se siamo assolutamente certi che il Cagliari vincerà, qualsiasi cifra sino a un massimo di 100 Euro sarà ragionevole; se invece siamo assolutamente certi che il Cagliari non vincerà, nessuna cifra maggiore di 0 Euro sarà ragionevole.

Le credenze altrui (2)

- Una fonte attendibile per attribuire credenze è il *comportamento di scommessa*. Supponiamo che un allibratore offra di pagare 100 Euro se il Cagliari vincerà la partita di domani, 0 Euro se perderà. Quanto è ragionevole pagare per poter partecipare alla scommessa?
- Se siamo assolutamente certi che il Cagliari vincerà, qualsiasi cifra sino a un massimo di 100 Euro sarà ragionevole; se invece siamo assolutamente certi che il Cagliari non vincerà, nessuna cifra maggiore di 0 Euro sarà ragionevole.
- Supponiamo invece di avere un grado di credenza pari a 0.8 nella vittoria del Cagliari. Allora sarà ragionevole pagare qualsiasi cifra sino a un massimo di 80 Euro.

Le credenze altrui (2)

- Una fonte attendibile per attribuire credenze è il *comportamento di scommessa*. Supponiamo che un allibratore offra di pagare 100 Euro se il Cagliari vincerà la partita di domani, 0 Euro se perderà. Quanto è ragionevole pagare per poter partecipare alla scommessa?
- Se siamo assolutamente certi che il Cagliari vincerà, qualsiasi cifra sino a un massimo di 100 Euro sarà ragionevole; se invece siamo assolutamente certi che il Cagliari non vincerà, nessuna cifra maggiore di 0 Euro sarà ragionevole.
- Supponiamo invece di avere un grado di credenza pari a 0.8 nella vittoria del Cagliari. Allora sarà ragionevole pagare qualsiasi cifra sino a un massimo di 80 Euro.
- In generale: $C_{A,t}(H)$ può essere calcolato come la cifra che A all'istante t sarebbe disposto a pagare per partecipare a una scommessa il cui premio è 1 Euro se H è vera e 0 Euro se H è falsa.

Accettare una credenza

- Anche se le credenze hanno dei gradi, spesso le nostre azioni richiedono un comportamento *binario*.

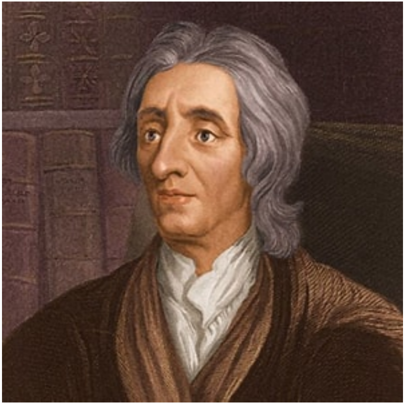
Accettare una credenza

- Anche se le credenze hanno dei gradi, spesso le nostre azioni richiedono un comportamento *binario*.
- Ad esempio, supponiamo di avere un grado di credenza di 0.9 nel fatto che l'aereo che dobbiamo prendere domani non cadrà. Se sapessimo che l'aereo fosse destinato a cadere, sicuramente non lo prenderemmo. Domani, tuttavia, avremo due sole possibilità: prendere l'aereo o non prenderlo.

Accettare una credenza

- Anche se le credenze hanno dei gradi, spesso le nostre azioni richiedono un comportamento *binario*.
- Ad esempio, supponiamo di avere un grado di credenza di 0.9 nel fatto che l'aereo che dobbiamo prendere domani non cadrà. Se sapessimo che l'aereo fosse destinato a cadere, sicuramente non lo prenderemmo. Domani, tuttavia, avremo due sole possibilità: prendere l'aereo o non prenderlo.
- Quando è ragionevole accettare una credenza? Ovvero, quando è che il nostro grado di credenza in un enunciato è sufficientemente alto per accoglierlo come vero?

John Locke (1632-1704)



La tesi di Locke

Le seguenti tesi sul processo di accettazione delle credenze sembrano a prima vista plausibili:

TL *Tesi di Locke*: Per un agente A è razionale accettare H all'istante t quando $C_{A,t}(H)$ supera un certo *valore di soglia* t.

CC *Chiusura congiuntiva*: Se per un agente A è razionale accettare H_1 all'istante t ed è razionale accettare H_2 all'istante t, allora per A è razionale accettare $H_1 \wedge H_2$ all'istante t.

Henry E. Kyburg Jr. (1928-2007)

Il paradosso della lotteria

- Alice partecipa a una lotteria con 1000 biglietti, in cui c'è un solo biglietto vincente.

Il paradosso della lotteria

- Alice partecipa a una lotteria con 1000 biglietti, in cui c'è un solo biglietto vincente.
- Sia $A =$ Alice, $H_1 =$ "Il biglietto n. 1 perderà", ... , $H_{1000} =$ "Il biglietto n. 1000 perderà".

Il paradosso della lotteria

- Alice partecipa a una lotteria con 1000 biglietti, in cui c'è un solo biglietto vincente.
- Sia A = Alice, H_1 = "Il biglietto n. 1 perderà", ... , H_{1000} = "Il biglietto n. 1000 perderà".
- Possiamo quindi assumere che $C_{A,t}(H_1) = 0.999, \ldots, C_{A,t}(H_{1000}) = 0.999$.

Il paradosso della lotteria

- Alice partecipa a una lotteria con 1000 biglietti, in cui c'è un solo biglietto vincente.
- Sia A = Alice, H_1 = "Il biglietto n. 1 perderà", ... , H_{1000} = "Il biglietto n. 1000 perderà".
- Possiamo quindi assumere che $C_{A,t}\left(H_1\right) = 0.999, ..., C_{A,t}\left(H_{1000}\right) = 0.999$.
- Per TL, per Alice è razionale accettare ciascun H_i se supera il valore soglia t per l'accettazione. Poniamo che $t = 0.995$.

Il paradosso della lotteria

- Alice partecipa a una lotteria con 1000 biglietti, in cui c'è un solo biglietto vincente.
- Sia A = Alice, H_1 = "Il biglietto n. 1 perderà", ... , H_{1000} = "Il biglietto n. 1000 perderà".
- Possiamo quindi assumere che $C_{A,t}(H_1) = 0.999, ..., C_{A,t}(H_{1000}) = 0.999$.
- Per TL, per Alice è razionale accettare ciascun H_i se supera il valore soglia t per l'accettazione. Poniamo che $t = 0.995$.
- Quindi è razionale per Alice accettare H_1 ed è razionale accettare H_2 ... ed è razionale accettare H_{1000}.

Il paradosso della lotteria

- Alice partecipa a una lotteria con 1000 biglietti, in cui c'è un solo biglietto vincente.
- Sia A = Alice, H_1 = "Il biglietto n. 1 perderà", ... , H_{1000} = "Il biglietto n. 1000 perderà".
- Possiamo quindi assumere che $C_{A,t}(H_1) = 0.999, ..., C_{A,t}(H_{1000}) = 0.999$.
- Per TL, per Alice è razionale accettare ciascun H_i se supera il valore soglia t per l'accettazione. Poniamo che $t = 0.995$.
- Quindi è razionale per Alice accettare H_1 ed è razionale accettare H_2 ... ed è razionale accettare H_{1000}.
- Per CC, è razionale per Alice accettare $H_1 \wedge ... \wedge H_{1000}$.

Il paradosso della lotteria

- Alice partecipa a una lotteria con 1000 biglietti, in cui c'è un solo biglietto vincente.
- Sia $A =$ Alice, $H_1 =$ "Il biglietto n. 1 perderà", ... , $H_{1000} =$ "Il biglietto n. 1000 perderà".
- Possiamo quindi assumere che $C_{A,t}(H_1) = 0.999, ..., C_{A,t}(H_{1000}) = 0.999$.
- Per TL, per Alice è razionale accettare ciascun H_i se supera il valore soglia t per l'accettazione. Poniamo che $t = 0.995$.
- Quindi è razionale per Alice accettare H_1 ed è razionale accettare H_2 ... ed è razionale accettare H_{1000}.
- Per CC, è razionale per Alice accettare $H_1 \wedge ... \wedge H_{1000}$.
- Ma alla fine ci sarà un biglietto vincente! Si arriva quindi al paradosso che è razionale per Alice accettare un enunciato certamente falso.

Prima risposta: aumentare il valore soglia

- Forse il paradosso dipende dal fatto che abbiamo scelto un valore soglia troppo basso: con $t = 0.9999$ il paradosso viene bloccato.

Prima risposta: aumentare il valore soglia

- Forse il paradosso dipende dal fatto che abbiamo scelto un valore soglia troppo basso: con $t = 0.9999$ il paradosso viene bloccato.
- Ma è una vittoria di Pirro: si può sempre immaginare una lotteria con un numero più elevato di biglietti per cui (supponendo un'attribuzione ragionevole di gradi di credenza) il paradosso ritorna.

Seconda risposta: accettare solo enunciati certi

- C'è solo un valore soglia che evita il paradosso: $t = 1$. Se accettiamo solo enunciati certi, nessun H_i potrà essere accettato e il paradosso sarà bloccato sul nascere.

Seconda risposta: accettare solo enunciati certi

- C'è solo un valore soglia che evita il paradosso: $t = 1$. Se accettiamo solo enunciati certi, nessun H_i potrà essere accettato e il paradosso sarà bloccato sul nascere.
- Accettare solo enunciati certi, tuttavia, sembra in contraddizione col comportamento di molti agenti, i cui gradi di credenza negli enunciati che accettano possono essere diversi tra loro.

Seconda risposta: accettare solo enunciati certi

- C'è solo un valore soglia che evita il paradosso: $t = 1$. Se accettiamo solo enunciati certi, nessun H_i potrà essere accettato e il paradosso sarà bloccato sul nascere.
- Accettare solo enunciati certi, tuttavia, sembra in contraddizione col comportamento di molti agenti, i cui gradi di credenza negli enunciati che accettano possono essere diversi tra loro.
- Ad esempio, supponiamo che io sia A, che t sia l'istante attuale e che H="L'uomo è stato sulla Luna". Io accetto sia H che $H \vee \neg H$. Tuttavia, $1 = C_{A,t}(H \vee \neg H) > C_{A,t}(H)$. Infatti, potrebbe essere vera una qualche teoria del complotto, oppure potrei vivere in un mondo virtuale stile *Truman Show*... $H \vee \neg H$, invece, è una tautologia logica e pertanto certamente vera.

Seconda risposta: accettare solo enunciati certi

- C'è solo un valore soglia che evita il paradosso: $t = 1$. Se accettiamo solo enunciati certi, nessun H_i potrà essere accettato e il paradosso sarà bloccato sul nascere.
- Accettare solo enunciati certi, tuttavia, sembra in contraddizione col comportamento di molti agenti, i cui gradi di credenza negli enunciati che accettano possono essere diversi tra loro.
- Ad esempio, supponiamo che io sia A, che t sia l'istante attuale e che H="L'uomo è stato sulla Luna". Io accetto sia H che $H \vee \neg H$. Tuttavia, $1 = C_{A,t}\left(H \vee \neg H\right) > C_{A,t}\left(H\right)$. Infatti, potrebbe essere vera una qualche teoria del complotto, oppure potrei vivere in un mondo virtuale stile *Truman Show*... $H \vee \neg H$, invece, è una tautologia logica e pertanto certamente vera.
- Non è facile fare un esempio di qualche enunciato empirico del quale siamo assolutamente certi. Pensiamo di sapere il nostro nome? Forse i nostri genitori ci hanno mentito... Pensiamo di essere in un'aula universitaria? Forse non è vero e siamo solo dentro una simulazione al computer...

Agenti effettivi e agenti idealizzati

Dobbiamo quindi rinunciare al concetto di accettazione e fondare la nostra epistemologia delle credenze esclusivamente sui gradi di credenza? Dipende.

- Se ci interessa costruire un modello del comportamento degli agenti effettivi, la nozione di accettazione è importante. Le nostre interazioni linguistiche sembrano presupporla, e i nostri limiti cognitivi ci portano a semplificare il modello continuo dei gradi di credenza in un modello tripartito (nel quale si accetta un'ipotesi, la si rifiuta o si sospende il giudizio).
- Se ci interessa costruire un modello del comportamento di un agente razionale idealizzato, la nozione di accettazione è meno rilevante e può essere accantonata.