

9 Esercizi di Analisi Matematica 2 - Lista 9

Esercizio 9.1. Siano

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \cos z \mathbf{i} + \sin z \mathbf{j} + z \sin x \mathbf{k}$$

e S la superficie della semisfera unitaria centrata nell'origine e contenuta nel semispazio $\{z \geq 0\}$ con l'orientazione data dal vettore normale "esterno" (cioè quello con la terza componente positiva). Calcolare il flusso del rotore di \mathbf{F} attraverso S :

$$\iint_S (\text{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n}) \, d\sigma$$

Esercizio 9.2. Sia S il toro di equazioni parametriche (con $R > r > 0$)

$$\varphi(u, v) : \begin{cases} x = (R + r \cos v) \cos u \\ y = (R + r \cos v) \sin u \\ z = r \sin v \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

- a) Assumendo l'iniettività di $\varphi(u, v)$ nei punti interni del suo dominio, scrivere il campo dei vettori normali indotto da $\varphi(u, v)$.
- b) Calcolare l'area di S .
- c) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(x, y, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} z \right).$$

attraverso S orientata dal campo dei vettori normali trovati nel punto (a).

Esercizio 9.3. Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{bx - ay}{x^2 + y^2} dx + \frac{ax + by}{x^2 + y^2} dy$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

- Calcolare gli integrali $\int_{\gamma} \omega$ e $\int_{-\gamma} \omega$, dove γ è il segmento che unisce (in quest'ordine) il punto $(1, 1)$ a $(2, 2)$.
- Determinare gli eventuali valori di a e b per i quali ω è chiusa.

- Trovare, se esistono, i valori di a e b per i quali la forma è esatta ed eventualmente calcolare le primitive.

Esercizio 9.4. Utilizzando le formule di Gauss-Green calcolare

$$\int_{FD^+} 3x^2y \, dy$$

dove FD è la frontiera del dominio $D = \{0 \leq x \leq 2, x-3 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\}$.

Esercizio 9.5. Calcolare il flusso del rotore di F attraverso la Σ :

$$\int_{\Sigma} \langle \operatorname{rot}(F), n_e \rangle \, d\sigma$$

dove $F = (1 - 2x, z - 3x, 2z^2)$ e $\Sigma = \{z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$.

Esercizio 9.6. Data la forma

$$\omega = [2 + 2x \cos(y - 1)] \, dx + [2 - x^2 \sin(y - 1)] \, dy$$

- dimostrare che è esatta;
- calcolarne una primitiva;
- calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove $\gamma = \{y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$.

Esercizio 9.7. Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^3}{2^n} (x-1)^n$$

(studiarne anche il comportamento agli estremi).