

8 Esercizi di Analisi Matematica 2 - Lista 8

Esercizio 8.1 (Esempi riguardanti la teoria). Siano date le seguenti serie numeriche e di funzioni:

- Condizione necessaria della convergenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3 + (x^2 + 2)n^2 + 4} - \sqrt{n^3 + 3xn^2 + 1})$$

- Criterio del rapporto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$$

- Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$$

- Serie Telescopica (serie di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- Convergenza puntuale

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{-\log n}$$

- Convergenza uniforme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, \quad x \in [0, 1]$$

- Convergenza totale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 x^n}, \quad x \in [1, \infty); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Esercizio 8.2 (Serie di potenze). Verificare che le seguenti serie di potenze hanno raggio di convergenza $r = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

Studiarne il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Esercizio 8.3. Determinare il raggio di convergenza r delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+1/n)^n}$$

Esercizio 8.4. Determinare l'intervallo di convergenza I della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^2 e^n}{n 2^n} x^n$$

Esercizio 8.5. Determinare l'intervallo di convergenza I delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n n^4}$$