Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Fisica

Analisi Matematica II

prof. Antonio Greco

Prima parte

Anno accademico 2024/25

OBIETTIVO: INTRODURRE LE FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI REALI. RISPETTANO LA

DEFINIZIONE: DATI DUE INSIEMI A E B, UNA FUNZIONE È UN SOTTOINSIEME $S \subset A \times B$ CHE ABBIA LA PROPRIETÀ FUNZIONALE: PER OGNI $x \in A$ ESISTE UN UNICO $y \in B$ TALE CHE $(x,y) \in S$.

IN QUESTO CORSO CONSIDERIAMO $B = \mathbb{R}$ E $A \subset \mathbb{R}^n$ CON $n \geqslant 2$. IN PARTICOLARE, SE $n = 2$, ALLORA UN $x \in A \subset \mathbb{R}^2$ SI RAPPRESENTA CON $x = (x_1, x_2)$ DOVE $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO: $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ SUL DOMINIO $A = \mathbb{R}^2$.

$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ STESSO DOMINIO

$f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ SUL DOMINIO $x_1 > 0$, CIOÈ $A = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \}$

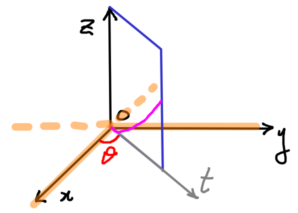
$$= (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty).$$

È LEGITTIMO, IN ALTERNATIVA, PRENDERE

$$A = \{ (x_1, x_2) : x_2 = 1, 2, 3, \dots \}$$
$$= \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^+$$

LU 30 SET 2024

IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI: CI SI AIUTA INTERSECANDOLO CON UN PIANO OPPORTUNO. ESEMPIO: CONSIDERIAMO $z = xy$



$$\begin{cases} x = t \cos\theta \\ y = t \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$z = t^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} t^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

IN GENERALE, IL GRAFICO Γ DI UNA $f : A \to \mathbb{R}$ CON $A \subset \mathbb{R}^n$ È L'INSIEME

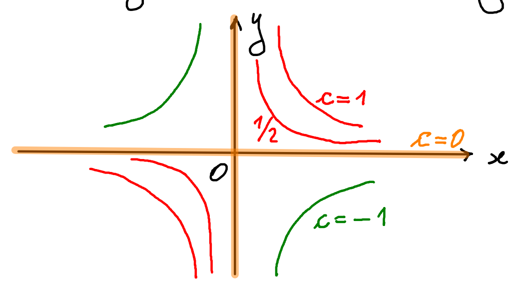
$$\Gamma = \{ (x, y) \in A \times \mathbb{R} : y = f(x) \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$\boxed{\text{INSIEMI DI LIVELLO}}$ GLI INSIEMI DI LIVELLO DI UNA $f : A \to \mathbb{R}$ SONO GLI INSIEMI

$$\{ x \in A : f(x) = c \} \text{ CON } c \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO: $A = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = xy$

L'INSIEME $f(x,y) = c$ È L'INSIEME DEI PUNTI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ TALI CHE $xy = c$



ESERCIZI: STUDIARE IL GRAFICO DI $f(x,y) = x + y$, $f(x,y) = x - y$, $f(x,y) = x^2 - y^2$ E $f(x,y) = y^2 - x^2$.

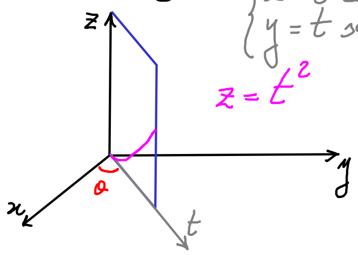
MA 01 OTT 2024

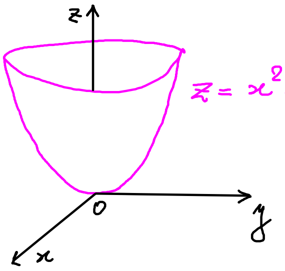
FUNZIONI RADIALI

ESEMPIO: $z = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$z = t^2$

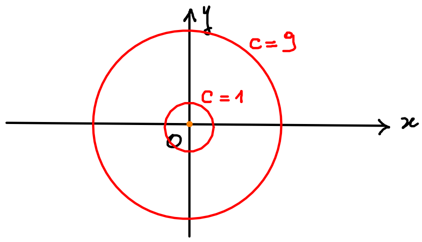




$z = x^2 + y^2$

CERCHIAMO GLI INSIEMI DI LIVELLO:

$$\{(x,y) : f(x,y) = c\} = \{(x,y) : x^2+y^2 = c\}$$



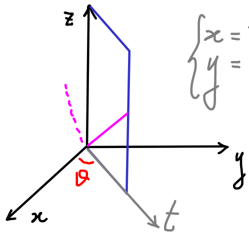
ESERCIZI: STUDIARE IL GRAFICO DELLE FUNZIONI RADIALI $f(x,y) = -x^2 - y^2$, $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$.

DEFINIZIONE: UNA $f(x,y)$ SI DICE RADIALE SE ESISTE UN'OPPORTUNA FUNZIONE $\varphi(t)$ TALE CHE $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$

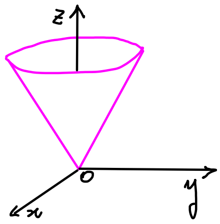
ESEMPIO: $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $t = x^2+y^2$

$$f(x,y) = \varphi(x^2+y^2) = \sqrt{x^2+y^2} = z$$

$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

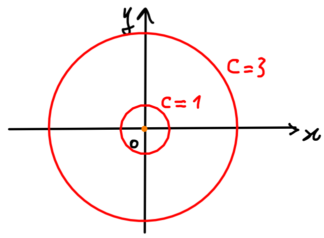


$z = \sqrt{t^2} = |t|$



$$\varphi(x^2+y^2) = \varphi(z^2)$$

INSIEMI DI LIVELLO: $\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} = c\}$



ESERCIZI: STUDIARE IL GRAFICO DELLE FUNZIONI RADIALI $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$, $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

ESEMPIO DI DOMANDA: CHE COS'È UNA FUNZIONE RADIALE?

RISPOSTA: UNA FUNZIONE $f(x,y)$ DI DUE VARIABILI SI DICE RADIALE SE RISULTA

$$f(x,y) = \varphi\left(x^2+y^2\right)$$

DOVE $\varphi(t)$ È UNA FUNZIONE DELLA VARIABILE t.

CHIARIMENTO: PER QUALI (x,y) RISULTA

$$f(x,y) = \varphi\left(x^2+y^2\right)\ ?$$

PER OGNI (x,y) NEL DOMINIO DI f.

FARE UN ESEMPIO: $f(x,y) = x^2+y^2$ È RADIALE (QUI $\varphi(t) = t$).

FARE UN CONTROESEMPIO: $f(x,y) = xy$ NON È RADIALE.

TRACCIARE I GRAFICI DI TALI FUNZIONI.

NOTA: UNA $f(x_1, \dots, x_n)$ SI DICE RADIALE SE HA LA FORMA

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$

OSSERVAZIONE: UN **CAMPO VETTORIALE**

$$\vec{F}(x,y,z) = X(x,y,z)\,\hat{\imath} + Y(x,y,z)\,\hat{\jmath} + Z(x,y,z)\,\hat{k}$$

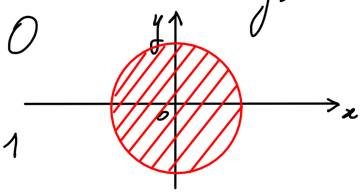
È INDIVIDUATO DALLE TRE FUNZIONI $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ DEFINITE PER $(x,y,z) \in \Omega$ (DOMINIO)

GI 03 OTT 2024

STUDIAMO IL GRAFICO DI $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

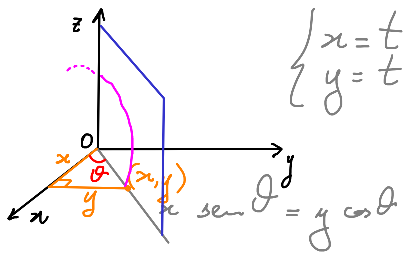
1. **DOMINIO:** L'INSIEME DEI PUNTI (x,y) TALI CHE $1-x^2-y^2 \geq 0$

OVVERO $x^2+y^2 \leq 1$



DUNQUE IL **DISCO**, O **CERCHIO**, CENTRATO IN $(0,0)$ E DI RAGGIO 1.

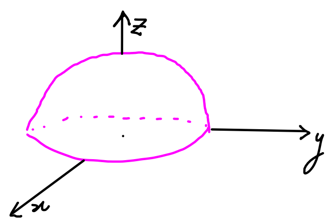
2. **INTERSECHIAMO CON IL PIANO** $x \operatorname{sen}\theta = y\cos\theta$ DOVE θ È UN PARAMETRO FISSATO.



$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

TROVIAMO $f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta) = \sqrt{1-t^2} \geq 0$ PER $t \in [-1,1]$, ED ELEVANDO AL QUADRATO $z = \sqrt{1-t^2}$ SI OTTIENE $z^2 = 1-t^2$, DUNQUE $t^2+z^2 = 1$.

3. **FACENDO VARIARE θ LA SEMICIRCONFERENZA DESCRIVE LA SEMISFERA SUPERIORE CENTRATA IN $(0,0)$ E DI RAGGIO 1**



IN ALTERNATIVA, POSSO ANCHE ELEVARE AL QUADRATO $z = \sqrt{1-x^2-y^2} \geq 0$ E OTTENERE

$x^2+y^2+z^2 = 1$ EQUAZIONE DELLA SFERA CENTRATA IN $(0,0,0)$ E DI RAGGIO 1.

 GI 03 OTT 2024

OSSERVAZIONE: ESSENDO $1-x^2-y^2 \leq 1$ E $0 \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \leq 1$, LA FUNZIONE $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ È LIMITATA.

IN GENERALE, UNA $f(x,y)$ È LIMITATA SE ESISTONO DUE COSTANTI m, M TALI CHE $m \leq f(x,y) \leq M$ PER OGNI (x,y) NEL DOMINIO.

NOTA: VALE PRENDERE m MOLTO PICCOLA, E M MOLTO GRANDE!

SE ESISTE ALMENO UN PUNTO P DEL DOMINIO DOVE $f(x_P, y_P) = m$ SI SCRIVE

$$\min f = m \quad (\text{VALORE MINIMO})$$

SE ESISTE ALMENO UN PUNTO Q DEL DOMINIO DOVE $f(x_Q, y_Q) = M$ SI SCRIVE

$$\max f = M \quad (\text{VALORE MASSIMO})$$

NEL NOSTRO CASO SI HA: $f(x_P, y_P) = 0$ SE $(x_P, y_P) = (1,0) = P$ QUINDI

$$\min \sqrt{1-x^2-y^2} = 0.$$

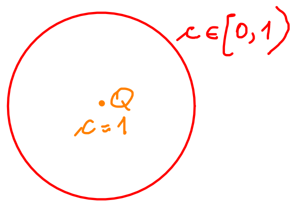
INOLTRE $f(x_Q, y_Q) = 1$ SE $(x_Q, y_Q) = (0,0) = Q$, QUINDI $\max f = 1$.

UN PUNTO P COME SOPRA SI DICE PUNTO DI MINIMO, UN PUNTO Q PUNTO DI MASSIMO.

AD ESEMPIO, $P' = (-1, 0)$ È UN PUNTO DI MINIMO PER $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

TRACCIAMO LE LINEE DI LIVELLO DELLA FUNZIONE $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. SONO LE LINEE DI EQUAZIONE $f(x,y) = c$, DUNQUE $\sqrt{1-x^2-y^2} = c$. SAPPIAMO CHE $\min f = 0$ E $\max f = 1$, QUINDI SE $c \notin [0,1]$ OTTENIAMO L'INSIEME VUOTO. SE $c \in [0,1)$ ELEVANDO AL QUADRATO TROVIAMO $1-x^2-y^2 = c^2 \in [0,1)$ OVVERO $x^2+y^2 = 1-c^2$ CON $1-c^2 \in (0,1]$ CIRCONFERENZA CENTRATA IN $(0,0)$ DI RAGGIO $r = \sqrt{1-c^2}$.

SE $c = 1$ SI TROVA $\{Q\} = \{(0,0)\}$.



LU 07 OTT 2024

DEFINIZIONE: UN PUNTO $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ SI DICE PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER UN INSIEME $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ L'INTERSEZIONE $\Omega \cap B_\varepsilon(x_0, y_0)$ CONTIENE INFINITI PUNTI.

$(B = \text{Ball})$

L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI DI ACCUMULAZIONE SI INDICA CON $D\Omega$ (DERIVATO DI Ω).

ESEMPIO: SE $\Omega = \overline{B}_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ RISULTA $D\Omega = \Omega$.

DEFINIZIONI DI LIMITE

1. LIMITE FINITO

DATA UNA $f : \Omega \to \mathbb{R}$ CON $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ E PRESO UN $(x_0, y_0) \in D\Omega$, SI SCRIVE

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$$

OPPURE $f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \to (x_0,y_0)]{} \ell$

SE PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE RISULTI $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$ PER OGNI $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ APPARTENENTE ALL'INTERSEZIONE $\Omega \cap B_\delta(x_0, y_0)$.

ESERCIZIO: POSTO $\Omega = \overline{B}_1(0,0)$ E $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, VERIFICARE CHE $f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$.

2. LIMITE INFINITO

SIANO $f : \Omega \to \mathbb{R}$ E $(x_0, y_0) \in D\Omega$

SI SCRIVE $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$

OPPURE $f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \to (x_0,y_0)]{} +\infty$ SE

PER OGNI $M \in (0, +\infty)$ ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE SI HA $f(x,y) > M$ PER OGNI $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ APPARTENENTE ALL'INTERSEZIONE $\Omega \cap B_\delta(x_0, y_0)$.

SIMILMENTE, SI SCRIVE $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty$, OVVERO $f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \to (x_0,y_0)]{} -\infty$

SE PER OGNI $M \in (0, +\infty)$ ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE RISULTI $f(x,y) < -M$ QUALUNQUE SIA IL PUNTO $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ NELL'INTERSEZIONE $\Omega \cap B_\delta(x_0, y_0)$.

ESERCIZIO: PONIAMO $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ E $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. VERIFICARE CHE $(0,0) \in D\Omega$ E $f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} +\infty$.

ESEMPIO DI UNA $f: \Omega \to \mathbb{R}$ CON $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ CHE NON AMMETTE LIMITE PER $(x,y) \to (0,0)$: $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

LA FUNZIONE È LIMITATA PERCHÉ RISULTA

$$-1 \leq \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \text{PER OGNI } (x,y) \neq (0,0)$$

OVVERO $\left| \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \right| = \dfrac{2|xy|}{x^2+y^2} \leq 1.$

PER VERIFICARLO, ESSENDO $x^2+y^2 > 0$ LA RISCRIVO $2|x| \cdot |y| \leq x^2+y^2 = |x|^2 + |y|^2$,

QUESTA EQUIVALE A $(|x| - |y|)^2 \geq 0$,

CHE È EVIDENTE.

LA FUNZIONE NON AMMETTE LIMITE PER $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ PERCHÉ:

a) $f(x,x) = 1$ PER OGNI $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f(x,0) = 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

IN ALTERNATIVA, PONENDO $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

TROVIAMO $f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$
$= \operatorname{sen} 2\theta$

NOTIAMO CHE IN OGNI $B_\varepsilon(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ LA f ASSUME TUTTI I VALORI IN $[-1, 1]$, PERCIÒ NON AMMETTE LIMITE IN $(0,0)$.

TEOREMI SUI LIMITI

1. UNICITÀ DEL LIMITE: SE $f \to L$, FINITO O INFINITO, ALLORA $f \not\to L'$ COMUNQUE SI PRENDA $L' \neq L$.

2. PERMANENZA DEL SEGNO: SE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$$

ALLORA PER OGNI $m \in (-\infty, \ell)$ ESISTE $\delta \in (0,+\infty)$ TALE CHE $f(x,y) > m$ PER OGNI $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ IN $\Omega \cap B_\delta(x_0,y_0)$.

COROLLARIO: SE $\ell > 0$ POSSO PRENDERE $m = 0 \in (-\infty, \ell)$ E OTTENGO UN $\delta \in (0,+\infty)$ TALE CHE $f(x,y) > 0$ PER OGNI $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ APPARTENENTE A $\Omega \cap B_\delta(x_0,y_0)$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: PRENDO $m \in (-\infty, \ell)$ E DETERMINO δ. DEFINISCO $\varepsilon = \ell - m > 0$.

SICCOME $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ PER IPOTESI, ESISTE $\delta \in (0,+\infty)$ TALE CHE

$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$ PER OGNI $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ APPARTENENTE A $\Omega \cap B_\delta(x_0,y_0)$. DUNQUE

$\ell - \varepsilon < f(x,y) < \ell + \varepsilon$ E, IN PARTICOLARE,

$f(x,y) > \ell - \varepsilon = \ell - (\ell - m) = m$

CHE È LA TESI.

3. ALGEBRA DEI LIMITI

CONSIDERIAMO $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ TALI CHE

$f \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ E $g \to \ell_2 \in \mathbb{R}$ PER

$(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0) \in D\Omega$. ALLORA:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y) \pm g(x,y) \right) = \ell_1 \pm \ell_2;$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\, g(x,y) = \ell_1 \ell_2;$$

INOLTRE, SE $\ell_2 \neq 0$, SI TROVA

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

NOTARE CHE PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO ESISTE $\delta \in (0,+\infty)$ TALE CHE $g(x,y) \neq 0$ PER OGNI $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ IN $\Omega \cap B_\delta(x_0,y_0)$.

INFINE, SE $\ell_2 \in (0,+\infty)$, ALLORA

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(g(x,y) \right)^{f(x,y)} = \ell_2^{\ell_1}.$$

MA 08 OTT 2024

LA CONTINUITÀ

DEFINIZIONE: CONSIDERIAMO UNA $f : \Omega \to \mathbb{R}$ CON $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ED UN PUNTO $(x_0,y_0) \in \Omega$.

1. SE $(x_0,y_0) \in D\Omega$, E SE
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$
SI DICE CHE f È CONTINUA NEL PUNTO (x_0,y_0).

2. SE $(x_0,y_0) \in \Omega \setminus D\Omega$ SI DICE CHE (x_0,y_0) È UN PUNTO ISOLATO DI Ω, E CHE f È CONTINUA NEL PUNTO (x_0,y_0).

ESEMPIO: SAPENDO CHE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, DEFINIAMO $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ PONENDO

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{SE } (x,y) = (0,0) \\ \sqrt{x^2+y^2}, & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

SI VERIFICA CHE f È DISCONTINUA IN $(0,0)$.

ESEMPIO: COMUNQUE SI PRENDA $z_0 \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE

$$f(x,y) = \begin{cases} z_0, & \text{SE } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

È DISCONTINUA NELL'ORIGINE.

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

1. PERMANENZA DEL SEGNO: SIA $f: \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. SE $f(x_0,y_0) = \ell$ È POSITIVO, ESISTE $\delta \in (0, +\infty)$ TALE CHE $f(x,y) > \frac{\ell}{2}$ PER OGNI $(x,y) \in \Omega \cap B_\delta(x_0,y_0)$.

DIMOSTRAZIONE: ESERCIZIO (APPLICARE LA DEFINIZIONE).

2. PROPRIETÀ ALGEBRICHE: SIANO $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUE IN $(x_0,y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. ALLORA LE FUNZIONI $f(x,y) \pm g(x,y)$, $f(x,y) \cdot g(x,y)$ RISULTANO CONTINUE NEL PUNTO (x_0,y_0). SE, INOLTRE, $g(x_0,y_0) \neq 0$, ALLORA ANCHE LA FUNZIONE $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ LO È. INFINE, SE $g(x_0,y_0) > 0$, ANCHE LA FUNZIONE $\left(g(x,y)\right)^{f(x,y)}$ È CONTINUA NEL PUNTO (x_0,y_0).

3. QUALUNQUE FUNZIONE SIA DEFINITA PER COMPOSIZIONE DI DUE O PIÙ FUNZIONI CONTINUE RISULTA ANCH'ESSA CONTINUA.

a) SE $f(x,y)$ È CONTINUA, COME PURE $\varphi(t)$ E $\psi(t)$, ALLORA $f(\varphi(t), \psi(t))$ È CONTINUA.

b) SE $\varphi(t)$ E $f(x,y)$ SONO CONTINUE, ALLORA $\varphi(f(x,y))$ È CONTINUA.

GI 10 OTT 2024

È FONDAMENTALE OSSERVARE CHE LE FUNZIONI $f(x,y) = x$ E $g(x,y) = y$ SONO CONTINUE. DIMOSTRIAMO CHE f LO È, PRENDO $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ E VEDO SE $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, CIOÈ SE $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$.

È SUFFICIENTE VERIFICARE CHE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x - x_0) = 0.$$

PONIAMO

$$e = \frac{(x-x_0,\ y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

SICCOME $\|e\| = 1$, RISULTA

$$\left| \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right| \leq 1$$

E QUINDI

$$|x - x_0| = \left| \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right| \cdot \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$\leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$$

GI 10 OTT 2024

DERIVATE PARZIALI

DEFINIZIONE: CONSIDERIAMO UNA $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ED UN PUNTO (x_0, y_0) INTERNO AD Ω CIOÈ TALE CHE ESISTE $\varepsilon > 0$ TALE CHE $B_\varepsilon(x_0, y_0) \subset \Omega$.

SE ESISTE FINITO IL
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
SI DICE CHE f È DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO AD x NEL PUNTO (x_0, y_0), IL VALORE DEL LIMITE SI CHIAMA DERIVATA PARZIALE E SI DENOTA IN VARI MODI: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\partial_x f(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$, ECCETERA.

SIMILMENTE, SE ESISTE FINITO IL LIMITE
$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$
SI DEFINISCE
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

ESEMPI: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

PRESO $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, LE FUNZIONI $f(x, y_0) = \sqrt{x^2 + y_0^2}$ E $f(x_0, y) = \sqrt{x_0^2 + y^2}$ SONO DERIVABILI, RISPETTIVAMENTE, NEI PUNTI $x = x_0$ E $y = y_0$, DUNQUE POSSIAMO SCRIVERE
$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{E}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

INVECE, SE $(x_0, y_0) = (0,0)$, I LIMITI
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x_0+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$
E
$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to 0} \frac{|y|}{y}$$
NON ESISTONO, DUNQUE $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ NON È DERIVABILE NÉ RISPETTO AD x NÉ RISPETTO AD y NEL PUNTO $(x_0, y_0) = (0,0)$.

OSSERVAZIONE: LA FUNZIONE
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{SE } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$
È DISCONTINUA IN $(x_0, y_0) = (0,0)$ BENCHÉ SIA IVI DERIVABILE PARZIALMENTE, E SI TROVA CHE
$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$