Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

11 settembre 2024

Esercizio 1

Si denoti con W' il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Si consideri l'applicazione lineare $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, b+c, c+d)$$

e il sottoinsieme W di $M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$W = \{\mathbf{w} \in M_2(\mathbb{R}) : f(\mathbf{w}) \in W'\}$$

a) Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$
b) Trovare una base di W'
c) Trovare una base di W

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + kx_5 = k \\ x_2 + x_4 = 0 \\ k^2 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + kx_5 = 1 \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

Esercizio 3

Sia $f_k: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base $B = \{(1,1,1), (1,0-1), (1,0,0)\}$, è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile
b) Trovare una base degli autospazi dell'endomorfismo nel caso $k = 1$