LE SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 1 DEL 11 SETTEMBRE 2024

ESERCIZIO 1

a) Siano $w_1, w_2 \in W$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ arbitrari.

Allora

$$f(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \overset{f \text{ lineare}}{=} \lambda_1 \underbrace{f(w_1)}_{\in W'} + \lambda_2 \underbrace{f(w_2)}_{\in W'} \in W'$$

poiché W' è sottospazio vettoriale

Quindi $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$.

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$x_3 = t$ Il sistema è equivalente a

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases}$ $\qquad x_1 = -x_2 = -t$

$x_3 = t$

Di conseguenza

$$W' = \{(-t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{t(-1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= L(-1, 1, 1)$$

Una base di W' è $\{(-1, 1, 1)\}$

c) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W' \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : (a+b, b+c, c+d) \in L(-1,1,1) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : rg\begin{pmatrix} a+b & b+c & c+d \\ \boxed{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \det\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{cases} a+b+b+c = 0 \\ a+b+c+d = 0 \end{cases} \right\}$$

Si tratta dunque di risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} c = -s - 2t \\ c + d = -s - t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = s \\ b = t \end{array}$$

da cui

$$c = -s - 2t$$

$$d = -s - t - c = -s - t + s + 2t = t$$

In conclusione

$$W' = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ -s-2t & t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Poiché i vettori $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali, essi sono linearmente indipendenti e costituiscono una base di W.

Esercizio 2

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + kx_5 = k \\ x_2 + x_4 = 0 \\ k^2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + kx_5 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ k^2 & 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & k & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k^2 & 1 & 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo gli orlati di tale minore.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ k^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k^2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - k^2 = (1-k)(1+k)$$

Se $k \neq 1$ $\underline{e}$ $k \neq -1$ allora $rg(A) = 3 = rg(A|B)$

e il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni.

Per $k=1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo i rimanenti orlati di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in A:

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$
- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ (due colonne uguali)

Analogamente anche tutti gli orlati di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $A|B$ sono nulli, dato che la colonna B è uguale a ultima colonna di A

Quindi per $k=1$ $\quad rg(A) = 2 = rg(A|B)$,
il sistema è compatibile e ammette ∞^3 soluzioni.

Per $k=-1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso i rimanenti due orlati in A sono nulli:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

Tuttavia l'orlato in A|B ottenuto aggiungendo la colonna B non è nullo:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Per $k=-1$ $\quad rg(A)=2$, $\quad rg(A|B)=3$ e quindi sistema è incompatibile.

Troviamo l'insieme delle soluzioni per $k \neq 1, k \neq -1$.
In tal caso il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -kt + k \\ x_2 = -s \\ k^2 x_1 + x_2 + x_3 = -s - kt + 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_4 = s \\ x_5 = t \end{array}$$

Abbiamo subito $x_2 = -s$. Sostituendo si ha

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -kt + k \\ k^2 x_1 + x_3 = -kt + 1 \end{cases}$$

Sottraendo: $(1-k^2) x_1 = k - 1 \overset{k \neq 1}{\Longrightarrow} (1+k) x_1 = -1$

$$\underset{k \neq -1}{\Longrightarrow} \quad x_1 = \frac{-1}{1+k}$$

Sostituendo nella prima equazione:

$$x_3 = -x_1 - kt + k = \frac{1}{1+k} - kt + k$$

L'insieme delle soluzioni è:

$$\left\{ \left(\frac{-1}{1+k}, -s, \frac{1}{1+k} - kt + k, s, t \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Troviamo l'insieme delle soluzioni per $k = 1$.
In tal caso il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = -r - t + 1 \\ x_2 = -s \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_3 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$\{(-r-t+1, -s, r, s, t) : r, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

ESERCIZIO 3

$$B = \{ \underset{v_1}{(1,1,1)}, \underset{v_2}{(1,0,-1)}, \underset{v_3}{(1,0,0)} \}$$

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} k-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} k-\lambda & 1 \\ 1 & k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((k-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (2-\lambda)(k-\lambda-1)(k-\lambda+1)$$

Troviamo 3 autovalori (non necessariamente distinti)

2, $k-1$, $k+1$

La molteplicità algebrica dipende da k.

Se $k = 1$, abbiamo gli autovalori 2 ($m_a = 2$) e 0 ($m_a = 1$).

Se $k = 3$, abbiamo gli autovalori 2 ($m_a = 2$) e 4 ($m_a = 1$).

In tutti gli altri casi abbiamo 3 autovalori reali e distinti.

• <u>CASO $k=1$</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{sistema è equivalente a}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -t \\ x_1 + x_2 = t \end{cases} \qquad x_3 = t$$

da cui $x_2 = 0, \quad x_1 = t, \quad x_3 = t.$

Allora $V(2) = \{ t v_1 + 0 \cdot v_2 + t v_3 : t \in \mathbb{R} \}$

$$= \{ t (v_1 + v_3) : t \in \mathbb{R} \}$$

$$= L(v_1 + v_3)$$

$$= L((1,1,1) + (1,0,0)) = L(2,1,1).$$

Possiamo già concludere che per $k = 1$ f NON è diagonalizzabile, dato che $m_g(2) = 1 \neq m_a(2)$.

Troviamo $V(0)$.

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ da cui $x_2 = 0, \ x_1 = t, \ x_3 = -t$

Allora $V(0) = \{ t v_1 + 0 \cdot v_2 - t v_3 : t \in \mathbb{R} \}$

$$= \{ t(v_1 - v_3) : t \in \mathbb{R} \} = L(v_1 - v_3)$$

$$= L(0, 1, 1).$$

Una base di $V(2)$ è $\{(2,1,1)\}$.

Una base di $V(0)$ è $\{(0,1,1)\}$

• CASO $k = 3$ $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sappiamo già che $m_g(4) = m_a(4) = 1$.

Inoltre
$$m_g(2) = \dim V(2) = 3 - rg\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix}$$
$$= 3 - rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$
$$= m_a(2)$$

Quindi per $k=3$ f è diagonalizzabile.

• CASO $k \neq 3$, $k \neq 1$

In questo caso f è diagonalizzabile perché ammette $3 = \dim \mathbb{R}^3$ autovalori reali e distinti.