Nota integrativa su

Superfici e integrali di superficie

1 Piano tangente e versore normale

Definizione 1. Siano D un dominio connesso di $\mathbb{R}^2$, $\varphi = \varphi(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, (u_0, v_0) appartenente all'interno $\overset{\circ}{D}$ di D e $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$. Si definiscono:

1. *piano tangente alla superficie* in P_0, il piano passante per P_0 e individuato dai vettori $\varphi_u(u_0, v_0)$ e $\varphi_v(u_0, v_0)$;
2. *versore normale alla superficie* in P_0, il versore

$$\nu(P_0) = \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{|\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)|}.$$

Osservazione 1. È importante osservare che se $\psi = \psi(s,t) : T \to \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare equivalente a φ tramite il cambiamento ammissibile di parametri $\Phi : T \to D$ allora si ha

$$\frac{\psi_s \wedge \psi_t}{|\psi_s \wedge \psi_t|} = \frac{J_\Phi}{|J_\Phi|} \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$$

dove J_Φ indica il determinante jacobiano di Φ (per i calcoli si veda il libro di testo a pag. 554 (ed. Liguori) o a pag. 451 (ed. Zanichelli)).

Ora, dato che J_Φ è una funzione continua e diversa da 0 nell'aperto connesso $\overset{\circ}{D}$, non è difficile concludere che $J_\Phi / |J_\Phi|$ è identicamente uguale a 1 oppure identicamente uguale a -1 in $\overset{\circ}{D}$ (come esercizio, provare a dimostrarlo).

In conclusione, indicando con ν_φ e ν_ψ rispettivamente i vettori normali di φ e ψ avremo $\nu_\psi \equiv \nu_\varphi$ oppure $\nu_\psi \equiv -\nu_\varphi$ in $\varphi\left(\overset{\circ}{D}\right)$.

2 Area di una superficie

Definizione 2. Sia D un dominio connesso regolare di $\mathbb{R}^2$ e $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Si dice *area* di φ il numero

$$A(\varphi) = \iint_D |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv. \tag{1}$$

Osservazione 2. Due possibili giustificazioni di questa definizione si possono trovare sul libro di testo dalla pag. 567 alla pag. 570 (ed. Liguori) o dalla pag. 461 alla pag. 463 (ed. Zanichelli).

Osservazione 3. Se ψ è una superficie equivalente a φ si dimostra che, grazie alla formula per il cambiamento di variabili negli integrali doppi, $A(\psi) = A(\varphi)$ (per i dettagli vedere il libro di testo a pag. 568 (ed. Liguori) o a pag. 462 (ed. Zanichelli)). Intendendo una superficie come classe di equivalenza, ciò equivale ad affermare che l'area di una superficie non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Esempio 1. Calcoliamo l'area della superficie della sfera di raggio r mediante la parametrizzazione $\varphi = \varphi(\psi, \theta)$ seguente

$$\begin{cases} x = r\sin\psi\cos\theta \\ y = r\sin\psi\sin\theta \\ z = r\cos\psi \end{cases}, \quad (\psi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$

Troviamo

$$\iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} |\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta| \, d\psi \, d\theta = \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^2 \sin\psi \, d\psi \, d\theta = 4\pi r^2.$$

Osservazione 4. Un caso notevole della formula (1) si ha quando la superficie in questione è una superficie cartesiana, cioè il sostegno è il grafico di una funzione di due variabili $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D$. In questo caso la parametrizzazione è data da $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Si trova immediatamente $|\varphi_x \wedge \varphi_y| = \sqrt{1 + |Df|^2}$ e quindi l'area del grafico di f è pari a

$$\iint_D \sqrt{1 + |Df|^2} \, dx \, dy.$$

Esercizio 1. Calcolare l'area del grafico della funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ con $x^2 + y^2 \leq 8$.

Definizione 3. Un'applicazione $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ si dice *superficie regolare a tratti* se

1. $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_N$ dove $D_1, D_2, \ldots, D_N$ sono domini connessi regolari di $\mathbb{R}^2$ a due a due privi di punti interni in comune;
2. φ è continua;
3. $\varphi_i = \varphi_{|D_i}$ (la restrizione di φ a D_i) è una superficie regolare per ogni $i = 1, 2, \ldots, N$.

Definizione 4. Sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare a tratti con $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_N$ secondo la definizione precedente. Si dice *area* di φ il numero

$$A(\varphi) = \sum_{i=1}^{N} \iint_{D_i} |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv.$$

Osservazione 5. Si può dimostrare che l'area così definita per una superficie regolare a tratti non dipende dalla particolare decomposizione di D.

Esempio 2. Le sei facce di un cubo coincidono con il sostegno di una superficie regolare a tratti in cui $N = 6$.

3 Orientabilità e orientazione

Riprendiamo, come definita nel paragrafo 98 (ed. Liguori) o 102 (ed. Zanichelli) del libro di testo, la nozione di orientabilità di una superficie. Data una superficie regolare $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$, questa si dice orientabile se è possibile estendere in modo continuo il campo dei versori normali ν_φ definiti su $S_0 = \varphi\left(\mathring{D}\right)$ a tutto il sostegno $S = \varphi(D)$[1].

Assegnata una superficie orientabile, segue che (grazie all'osservazione 1) ogni superficie ad essa equivalente induce sul (medesimo) sostegno S gli stessi versori normali oppure tutti i versori normali opposti. Come conseguenza di questo fatto ogni superficie, pensata ora come classe di equivalenza, si partiziona in esattamente due sottoclassi (dette *orientazioni della superficie*) in base ai due possibili comportamenti dei versori normali.

Scegliere un'orientazione di una superficie orientabile (o anche *orientare* una superficie orientabile) significa scegliere una di queste due sottoclassi e quindi, in pratica, utilizzare soltanto le parametrizzazioni (= superfici pensate come applicazioni) appartenenti alla sottoclasse scelta. Naturalmente queste parametrizzazioni daranno tutte luogo allo stesso campo di versori normali. Una volta scelta un'orientazione la superficie è detta *orientata*.

L'orientabilità, cioè l'esistenza di un campo continuo di versori normali definito su tutto il sostegno della superficie, corrisponde alla percezione intuitiva che *la superficie* (o meglio, il suo sostegno) *abbia due facce*, ciascuna determinata dai due possibili campi di versori normali. Si pensi ad esempio ad un cilindro (possiede una faccia "interna" ed una "esterna"). Viceversa,

[1] Più precisamente, questo significa richiedere l'esistenza di una funzione continua da S all'insieme $\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1\}$ (i versori nello spazio) tale che su S_0 coincida con ν_φ.

la non orientabilità è associata alla percezione intuitiva di una superficie avente una sola faccia come, per esempio, il nastro di Möbius[2]. Data una superficie orientabile, scegliere un'orientazione equivale a scegliere uno dei due possibili campi di versori normali. Dal punto di vista intuitivo ciò significa semplicemente *scegliere una delle sue due facce*.

Un'applicazione particolarmente notevole del concetto di orientazione la troviamo nel caso delle *superfici regolari con bordo*, rimandiamo al paragrafo 98 del libro di testo per la loro definizione. Queste superfici sono sempre orientabili e inoltre il loro bordo è costituito dall'unione di un numero finito di curve chiuse regolari o regolari a tratti disgiunte. Ora, sia la superficie che il suo bordo sono orientabili[3]. Per scopi futuri (teorema di Stokes) è necessario stabilire un legame tra l'orientazione della superficie e quella del suo bordo. Questa regola in forma rigorosa si trova descritta sempre nel paragrafo 98 (ed. Liguori) o 102 (ed. Zanichelli), tuttavia esiste una sua controparte intuitiva (purtroppo di verifica non immediata) molto utile che qui enunciamo. Sia fissata un'orientazione sulla superficie e cioè sia scelta una sua faccia. Allora, il bordo si dirà *orientato positivamente* rispetto all'orientazione della superficie se *percorrendo una qualunque curva del bordo e mantenendosi sulla faccia scelta, si lasciano i punti della superficie alla propria sinistra*.

4 Nota importante

Le definizioni di superficie regolare e superficie regolare con bordo introdotte nel corso di Analisi Matematica 3 NON sono equivalenti alle analoghe definizioni che si incontrano in Geometria (ad esempio, in Geometria, il nastro di Möbius è una superficie con bordo anche se non è orientabile). Questo perchè qui le definizioni geometriche porterebbero via troppo spazio e sposterebbero l'enfasi dall'aspetto analitico (nello specifico gli integrali di superficie) a quello geometrico. Ci sono comunque dei forti legami tra questi due approcci, è un esercizio istruttivo e consigliabile quello di confrontare le diverse definizioni (ovviamente nel momento in cui si presenteranno) in modo da acquisire una visione unitaria dell'argomento.

Per quanto riguarda invece le definizioni di orientabilità e orientazione date in Geometria, anche se leggermente diverse (come conseguenza di quanto appena detto) sono tuttavia equivalenti a quelle viste qui.

[2]Ci si può rendere conto di questo, ad esempio, provando a dipingerlo.

[3]Orientare il bordo significa orientare ciascuna delle curve che lo compongono.

Risultati degli esercizi
1. $\frac{52\pi}{3}$.

Libro di testo:
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, editore Liguori
oppure
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di analisi matematica due*, editore Zanichelli.