Nota integrativa sui

Massimi e minimi vincolati

1 Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

In questa nota studiamo l'ottimizzazione (cioè la ricerca dei massimi e dei minimi) di una funzione f di due o tre variabili ristretta all'insieme degli zeri di una seconda funzione g. Il metodo che verrà introdotto è detto *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

Definizione 1. Siano $f, g \in C^1(A)$ dove A è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. Poniamo $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$, questo insieme è detto *vincolo*. Un punto $(x_0, y_0) \in E_0$ si dice

1. punto di *massimo assoluto (o globale) vincolato* di f rispetto al vincolo E_0 se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in E_0$;
2. punto di *massimo relativo (o locale) vincolato* di f rispetto al vincolo E_0 se esiste un intorno $I_r(x_0, y_0)$ tale che $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in E_0 \cap I_r(x_0, y_0)$.

Analogamente si definiscono i punti di *minimo assoluto e relativo*, più generalmente si parla di punto di estremo assoluto o relativo vincolato. Evidentemente, un punto di estremo assoluto è anche di estremo relativo ma, in generale, non è valido il viceversa.

Esempio 1. Come esempio introduttivo determiniamo, se esiste, il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sotto il vincolo $xy - 3 = 0$[1]. Sono possibili (almeno) due soluzioni.

Soluzione 1. In questo caso E_0 è un iperbole che può essere facilmente parametrizzata come segue

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{3}{t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Componendo $f(x, y)$ con la parametrizzazione ci riconduciamo alla ricerca del minimo assoluto della funzione

$$p(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 + \frac{9}{t^2}.$$

[1]Con il termine "vincolo" spesso si indica anche l'equazione che definisce E_0.

Ora è sufficiente studiare il segno della derivata prima di $p(t)$ per concludere che il minimo assoluto esiste, è pari a 6 ed è raggiunto in corrispondenza dei punti $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ (come esercizio, verificare queste affermazioni).

Soluzione 2. Seguiamo ora una via geometrica e più intuitiva. Disegniamo l'iperbole $xy - 3 = 0$ e le linee di livello della funzione $f = x^2 + y^2$. Notiamo ora che quest'ultime sono tutte le circonferenze centrate nell'origine e che la funzione f è strettamente crescente rispetto al loro raggio. Da ciò segue che esistono due punti di minimo e che in ciascuno di questi punti la linea di livello corrispondente e il vincolo (inteso come sottoinsieme del piano) sono *tangenti*.

Traduciamo in formule quest'ultima informazione facendo uso dei gradienti delle funzioni $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = xy - 3$. Sappiamo che, se non si annullano, questi due gradienti sono ortogonali rispettivamente alle linee di livello di f e al vincolo. Ma è immediato verificare che $\nabla f(x, y)$[2] e $\nabla g(x, y)$ si annullano solo nell'origine, la quale non può essere un punto di minimo in quanto non appartiene all'iperbole. In conclusione, dato un punto (x, y) di E_0, E_0 e la linea di livello passante per (x, y) sono tangenti in (x, y) se e solo se esiste un numero λ (chiamato *moltiplicatore di Lagrange*) tale che

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Di conseguenza i punti di minimo si trovano tra le coppie (x, y) che verificano il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

per un opportuno numero reale λ.

Notare che, di fatto, le soluzioni di questo sistema sono terne numeriche (x, y, λ); i punti del piano cercati si ottengono poi estraendo le prime due componenti. Si osservi che il sistema, oltre a possedere le due soluzioni che abbiamo individuato geometricamente, potrebbe anche avere ulteriori soluzioni; esamineremo meglio questo aspetto successivamente.

Risolviamo il sistema. Osserviamo che, grazie alla terza equazione, x e y non possono annullarsi

[2]Per fare un pò di pratica con un'altra, ma altrettando usata, notazione per il gradiente, in questa nota usiamo il simbolo ∇ al posto della lettera D (il simbolo ∇ si legge "nabla" ed è il nome di un antico strumento musicale greco di forma triangolare).

$$\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \\ xy = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = \pm x \\ xy = 3 \end{cases};$$

da qui in poi spezziamo il sistema

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = x \\ xy = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = -x \\ xy = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = x \\ x^2 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = -x \\ -x^2 = 3. \end{cases}$$

Evidentemente l'ultimo sistema non ha soluzioni, per cui rimane soltanto

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2x}{y} \\ y = x \\ x^2 = 3 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(x, y, \lambda) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$ e $(x, y, \lambda) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2)$; da queste ricaviamo $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. Ora, per via geometrica, sappiamo che esistono esattamente due punti in cui il minimo assoluto viene raggiunto; perciò questi devono necessariamente essere quelli trovati. Inoltre tale minimo assoluto vale $f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 6$.

Nel caso in cui avessimo trovato più di due soluzioni oppure non sapessimo preventivamente quante soluzioni esistono lo studio non sarebbe concluso qui; vedremo casi di questo tipo più avanti.

Il metodo visto nella seconda soluzione dell'esempio precedente è essenzialmente il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, ci occuperemo qui di descriverlo e dimostrarlo nella sua versione più semplice e importante. Iniziamo con la seguente definizione.

Definizione 2. Siano $f, g \in C^1(A)$ dove A è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto dell'insieme $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$. Il punto (x_0, y_0) si dice *punto stazionario vincolato per f rispetto ad E_0 (o a g)* se

1. $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$[3];
2. $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$ per un opportuno $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Il numero λ_0 è detto *moltiplicatore di Lagrange*.

[3] A meno che non sia possibile un'interpretazione ambigua, il simbolo 0 verrà usato indifferentemente sia per lo zero scalare che per quello vettoriale.

In analogia con ciò che accade nella ricerca degli estremi liberi vale il seguente risultato.

Teorema 1. *Siano* $f, g \in C^1(A)$ *dove* A *è un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^2$. *Sia* (x_0, y_0) *un punto di estremo relativo vincolato di* f *rispetto al vincolo* $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$ *e* $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. *Allora* (x_0, y_0) *è un punto stazionario vincolato, cioè esiste un numero* λ_0 *tale che*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

Osservazione 1. Notare che il teorema fornisce una condizione solo necessaria; in altre parole un punto stazionario vincolato potrebbe anche *non* essere un punto di estremo relativo vincolato.

Dimostrazione. Poichè $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ possiamo applicare il teorema della funzione implicita a $g(x, y)$ nel punto (x_0, y_0). Per fissare le idee supponiamo che sia $g_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora esiste un intorno rettangolare del punto (x_0, y_0) in cui E_0 è il grafico di un'opportuna funzione $y = h(x)$ di classe C^1. Perciò, sempre nel medesimo intorno, E_0 coincide con il sostegno della curva regolare

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = h(x_0 + t) \end{cases}, \ t \in I$$

dove I è un opportuno intervallo contenente lo 0. Nel caso in cui si abbia $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ si ragiona in modo analogo. In ogni caso si può concludere che esiste un intorno del punto (x_0, y_0) in cui E_0 è il sostegno di una curva $(x(t), y(t))$ con $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ e $(x'(0), y'(0)) \neq 0$. Si noti che i vettori $(x'(0), y'(0))$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono ortogonali.

Consideriamo ora la composizione della curva con la funzione f (esattamente come nella soluzione 1 dell'esempio 1)

$$p(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in I.$$

Il punto di estremo relativo vincolato (x_0, y_0) per $f(x, y)$ si traduce così in un punto di estremo relativo (libero) per $p(t)$, per di più, poichè $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, questo punto di estremo è $t = 0$. Di conseguenza avremo $p'(0) = 0$, cioè

$$\left(\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right)_{|t=0} = 0,$$

che, grazie alla regola della catena, diventa

$$f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = 0.$$

Per cui, come il vettore $\nabla g(x_0, y_0)$, anche $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore $(x'(0), y'(0))$. Allora, trattandosi di vettori piani, esisterà un numero reale λ_0 tale che
$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$
□

In altre parole, per ogni punto di estremo relativo vincolato (x_0, y_0) in cui $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ esiste un numero reale λ_0 tale che (x_0, y_0, λ_0) è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

È possibile dare a quest'ultimo una forma più compatta introducendo la funzione *lagrangiana* del problema

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

In termini della lagrangiana il sistema assume la forma

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = 0. \end{cases}$$

e cioè, in analogia al caso degli usuali estremi relativi, $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$.

Il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* consiste nel ricercare gli estremi relativi vincolati di f tra le soluzioni del sistema precedente che non annullano il gradiente di g.

Da un punto di vista operativo (e con gli strumenti a nostra disposizione) possiamo schematizzare la procedura seguente:

1. si determinano i punti in cui $\nabla g = 0$ oppure in cui $\nabla g \neq 0$ e $\nabla L = 0$ (questi ultimi sono i punti stazionari vincolati);

2. si cerca di capire la natura dei punti trovati mediante il teorema di Weierstrass, il confronto dei valori assunti dalla funzione in tali punti, considerazioni geometriche (vedi l'esempio 1), etc.[4]

[4]Incidentalmente osserviamo che esistono anche condizioni del secondo ordine (cioè che coinvolgono le derivate seconde di L) che permettono, in certi casi, di identificare i punti stazionari vincolati trovati.

Ad esempio, siano i punti ricavati nel passo 1 in numero finito e sia noto dal passo 2 che f raggiunge il massimo assoluto. Allora tale massimo sarà necessariamente il valore più grande assunto da f nei punti trovati. Naturalmente alcune delle considerazioni di cui al passo 2 (ad esempio il teorema di Weierstrass) possono essere fatte anche prima di svolgere passo 1. Illustriamo il metodo con un esempio.

Esempio 2. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = e^{x+y}$ sotto il vincolo $g(x,y) = 0$ con $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Soluzione. Notiamo che la funzione e^{x+y} è continua in tutto il piano e quindi lo è anche la sua restrizione al vincolo $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (una circonferenza). Ma le circonferenze sono insiemi compatti, quindi per il teorema di Weierstrass, esistono punti di massimo e di minimo assoluti vincolati (non siamo invece in grado di affermare nulla sull'esistenza di estremi relativi che non siano anche assoluti).

Iniziamo esaminando l'eventuale annullamento di ∇g. Abbiamo che $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0)$ soltanto quando $(x,y) = (0,0)$, ma l'origine non fa parte del vincolo. Di conseguenza non dobbiamo esaminare alcun punto in cui $\nabla g = 0$.

Introduciamo ora la lagrangiana del problema

$$L(x,y,\lambda) = e^{x+y} - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Abbiamo

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = e^{x+y} - 2\lambda x \\ L_y(x,y,\lambda) = e^{x+y} - 2\lambda y \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^2 + y^2 - 1), \end{cases}$$

e quindi la condizione $\nabla L = 0$ diventa

$$\begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ e^{x+y} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Notare che l'ultima equazione riproduce la condizione di vincolo, questo accade sempre. Studiamo ora il sistema. Osserviamo che λ non può annullarsi, abbiamo

$$\begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ e^{x+y} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda x \\ y = x \\ 2x^2 = 1, \end{cases}$$

da cui ricaviamo $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. In funzione di ciascuno di questi valori determiniamo il valore (o, in generale, i valori) di y dalla seconda equazione e quello (o quelli) di λ dalla prima. Non è importante calcolare il valore di λ in quanto si tratta di una variabile ausiliaria utile solo ai fini di determinare x e y, tuttavia è *necessario* assicurarsi che un tale valore effettivamente esista. In conclusione troviamo i due punti stazionari vincolati

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad (x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Poiché, in questo caso, sappiamo che esistono punti di massimo e di minimo assoluti e dato che abbiamo trovato solo due punti, concludiamo che si tratta di punti di estremo assoluto. Per capire quale dei due è il massimo e quale è il minimo non resta che valutare la funzione in questi punti, $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = e^{\sqrt{2}}$ e $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = e^{-\sqrt{2}}$. Per cui il valore massimo è $e^{\sqrt{2}}$ ed è raggiunto nel punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ mentre il valore minimo è $e^{-\sqrt{2}}$ ed è ottenuto in $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Esercizio 1. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = x + 2y$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si generalizza notevolmente, in particolare vale per funzioni reali di un numero qualunque di variabili (si veda il teorema alla pag. 628 (ed. Liguori) o pag. 508 (ed. Zanichelli) del libro di testo). Man mano che la dimensione dello spazio cresce la varietà delle situazioni che si possono presentare aumenta, limitiamoci qui ad enunciare il caso tridimensionale.

Data una funzione $f(x, y, z)$ di classe C^1 in un aperto di $\mathbb{R}^3$ sono possibili due tipologie di vincolo.

Una "superficie" di equazione $g(x, y, z) = 0$.

In questo caso f è vincolata all'insieme definito dall'equazione

$$g(x, y, z) = 0$$

dove g è una funzione di classe C^1 nell'aperto in cui è definita f. La lagrangiana del problema è

$$L(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

I punti stazionari vincolati sono i punti in cui $\nabla g \neq 0$ che verificano il sistema $\nabla L = 0$, cioè

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) - \lambda g_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) - \lambda g_y(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) - \lambda g_z(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Una "curva" di equazioni $g(x,y,z) = 0$ e $h(x,y,z) = 0$.

In questo caso f è vincolata all'insieme definito dal sistema

$$\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

dove g e h sono funzioni di classe C^1 nell'aperto in cui è definita f. La lagrangiana del problema questa volta è

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) := f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z).$$

Compaiono due moltiplicatori di Lagrange: λ e μ.

I punti stazionari vincolati sono i punti che rendono i vettori ∇g e ∇h *linearmente indipendenti* e verificano il sistema $\nabla L = 0$, cioè

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) - \lambda g_x(x,y,z) - \mu h_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) - \lambda g_y(x,y,z) - \mu h_y(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) - \lambda g_z(x,y,z) - \mu h_z(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

L'indipendenza lineare dei vettori ∇g e ∇h si può anche esprimere richiedendo che la matrice

$$\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y,z)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla g(x,y,z) \\ \nabla h(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x(x,y,z) & g_x(x,y,z) & g_x(x,y,z) \\ h_x(x,y,z) & h_x(x,y,z) & h_x(x,y,z) \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. Un'altra condizione equivalente è che il prodotto vettoriale $\nabla g \wedge \nabla h$ sia diverso da zero (o meglio, dal vettore nullo).

Vediamo un esempio in cui si presenta questo secondo caso.

Esempio 3. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x,y,z) = z$ sotto i vincoli $g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0$ con $g(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ e $h(x,y,z) = z - 2x - 4y$.

Soluzione. Notiamo che la funzione f è continua ovunque e quindi lo è anche la sua restrizione alla curva definita dai vincoli. Questa curva è ottenuta intersecando il paraboloide ellittico $z = x^2 + y^2$ con il piano $z = 2x + 4y$. Poichè si tratta di un piano non verticale (la componente z della normale è diversa da 0) questa intersezione è un insieme limitato, è chiuso in quanto intersezione di due chiusi, dunque è compatto. Non è difficile convincersi che si tratta di un'ellisse, in ogni caso per i nostri scopi è sufficiente sapere che è un insieme compatto e che quindi la funzione f vincolata assume gli estremi assoluti.

Prima di impostare il sistema $\nabla L = 0$ dobbiamo isolare gli eventuali punti del vincolo in cui i vettori ∇g e ∇h sono paralleli (cioè linearmente dipendenti). Illustriamo due metodi per individuare questi punti.

Metodo 1: Come osservato poc'anzi questi sono tutti e soli i punti che annullano il prodotto vettoriale $\nabla g \wedge \nabla h$, abbiamo

$$\nabla g = (-2x, -2y, 1), \quad \nabla h = (-2, -4, 1)$$

e

$$\nabla g \wedge \nabla h = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2x & -2y & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-y)\mathbf{i} + 2(x-1)\mathbf{j} + 4(2x-y)\mathbf{k}.$$

Da cui segue subito che $\nabla g \wedge \nabla h = 0$ se e solo se $(x, y, z) = (1, 2, z)$ con z numero reale qualunque.

Metodo 2: L'unica possibilità affinché i vettori $(-2x, -2y, 1)$ e $(-2, -4, 1)$ siano paralleli è che esista un numero reale α tale che

$$(-2x, -2y, 1) = \alpha(-2, -4, 1).$$

Ma da ciò segue subito che $\alpha = 1$, $x = 1$, $y = 2$ e che z può assumere qualunque valore reale.

In conclusione i punti in cui i vettori ∇g e ∇h sono linearmente dipendenti sono esattamente i punti della retta verticale passante per il $(1, 2, 0)$. Resta ora da capire se il vincolo contenga o meno punti di questa retta, si tratta semplicemente sostituire le coordinate del punto $(1, 2, z)$ nelle equazioni del vincolo

$$\begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - 2x - 4y = 0. \end{cases}$$

Troviamo $z = 5$ dalla prima e $z = 10$ dalla seconda, per cui il vincolo non contiene alcun punto di questa retta. Di conseguenza, il sistema $\nabla L = 0$ deve essere esaminato su tutti i punti del vincolo.

La lagrangiana del problema è

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda(z - x^2 - y^2) - \mu(z - 2x - 4y).$$

Si trova

$$\begin{aligned} L_x &= 2\lambda x + 2\mu, \\ L_y &= 2\lambda y + 4\mu, \\ L_z &= 1 - \lambda - \mu, \\ L_\lambda &= -(z - x^2 - y^2), \\ L_\mu &= -(z - 2x - 4y), \end{aligned}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} \lambda x + \mu = 0 \\ \lambda y + 2\mu = 0 \\ 1 - \lambda - \mu = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - 2x - 4y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mu = -\lambda x \\ \lambda y + 2\mu = 0 \\ 1 - \lambda - \mu = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - 2x - 4y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda(y - 2x) = 0 \\ \mu = -\lambda x \\ 1 - \lambda - \mu = 0 \\ z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - 2x - 4y = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue che o $\lambda = 0$ oppure $y = 2x$. Ma, dalla seconda equazione, $\lambda = 0$ implica $\mu = 0$ che assieme contraddicono la terza. Dunque $y = 2x$ e quindi

$$\begin{cases} y = 2x \\ \mu = -\lambda x \\ \lambda + \mu = 1 \\ z = 5x^2 \\ z = 10x. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni determinano i valori di x, troviamo $x = 0$ e $x = 2$. Si ricavano poi immediatamente i corrispondenti valori di y, z, λ e μ. Per queste ultime due variabili è sufficiente (e anche necessario) accertarsi dell'esistenza di soluzioni in quanto qui non siamo interessati al loro valore.

Concludendo troviamo i punti $(0,0,0)$ in cui f vale 0 e $(2,4,20)$ in cui vale 20. Questi sono, rispettivamente, il punto di minimo assoluto e il punto di massimo assoluto.

Esercizio 2. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x,y,z) = xy$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Risultati degli esercizi

1. Minimo assoluto uguale a $-\sqrt{5}$ in $(-\sqrt{5}/5, -2\sqrt{5}/5)$ e massimo assoluto pari a $\sqrt{5}$ in $(\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$.

2. Minimo assoluto uguale a $-1/2$ raggiunto nei punti $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ e $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e massimo assoluto pari a $1/2$ in $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ (i punti stazionari vincolati $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$ sono punti di "sella").

Libro di testo:
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, editore Liguori oppure
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di analisi matematica due*, editore Zanichelli.