Nota integrativa su

I teoremi della funzione implicita e della funzione inversa

1 Retta tangente ad una curva di livello

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $F = F(x, y)$ una funzione di classe $C^1(A)$ e (x_0, y_0) un punto appartenente all'insieme Z degli zeri di F

$$Z = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$$

in cui $DF(x_0, y_0) \neq 0$[1]. Allora, grazie al teorema della funzione implicita, segue l'esistenza di un intorno aperto rettangolare di (x_0, y_0) in cui Z coincide con il grafico di una funzione di x oppure di y di classe C^1. È quindi naturale definire la retta tangente in (x_0, y_0) al grafico di tale funzione come la retta tangente in (x_0, y_0) a Z. Questa retta ha equazione cartesiana[2]

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

o in forma equivalente (denotando con $\Big(v, w\Big)$ il prodotto scalare dei vettori v e w)

$$\Big(DF(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\Big) = 0.$$

È immediato concludere che $DF(x_0, y_0)$ è ortogonale alla retta tangente e dunque a Z nel punto (x_0, y_0).

Tutto questo si applica senza alcuna difficoltà alle curve di livello di una funzione. Più precisamente, sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f(x, y) \in C^1(A)$. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la curva di livello

$$E_c = \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$$

coincide con l'insieme degli zeri della funzione $F(x, y) = f(x, y) - c$, inoltre $DF \equiv Df$. Dunque, se $(x_0, y_0) \in E_c$ e $Df(x_0, y_0) \neq 0$ si deduce che la retta tangente in (x_0, y_0) alla curva di livello E_c ha equazione cartesiana

$$\Big(Df(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\Big) = 0$$

[1] I punti di Z in cui il gradiente è diverso da 0 sono detti *regolari* mentre quelli in cui si annulla si dicono *singolari*.

[2] I calcoli si trovano nel paragrafo 101 (ed. Liguori) o 105 (ed. Zanichelli) del libro di testo.

e inoltre $Df(x_0, y_0)$ è ortogonale a E_c in (x_0, y_0). Riassumendo, *il gradiente $Df(x_0, y_0)$, quando è diverso da 0, è ortogonale alla linea di livello di f passante per (x_0, y_0) e (per quanto già noto in precedenza) punta verso la direzione di massima pendenza (o crescita) di f.*

2 Piano tangente ad una superficie di livello

Cominciamo con l'enunciare il teorema della funzione implicita per funzioni di più variabili (vedere il paragrafo 101 (ed. Liguori) o 105 (ed. Zanichelli) del libro di testo) nel caso particolare di una funzione $F(x, y, z)$ di 3 variabili.

Teorema 1 (Il teorema della funzione implicita per funzioni di 3 variabili). *Sia $F(x, y, z)$ definita in un aperto A di $\mathbb{R}^3$, continua e con derivata parziale F_z continua. Se (x_0, y_0, z_0) è un punto di A in cui*

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad e \qquad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

allora esistono $\delta, \sigma > 0$ ed un'unica funzione $f : I_\delta(x_0, y_0) \to (z_0 - \sigma, z_0 + \sigma)$ tali che

$$F(x, y, f(x, y)) = 0 \qquad \forall x \in I_\delta(x_0, y_0).$$

Inoltre f è continua e $f(x_0, y_0) = z_0$. Se poi $F \in C^1(A)$ allora $f \in C^1(I_\delta(x_0, y_0))$ e, per ogni $(x, y) \in I_\delta(x_0, y_0)$, si hanno le formule

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))} \tag{1}$$

e

$$f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}. \tag{2}$$

Infine, se $F \in C^k(A)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$ allora $f \in C^k(I_\delta(x_0, y_0))$.

Osservazione 1. Naturalmente, facendo ruotare il ruolo delle variabili x, y, z nell'enunciato il teorema rimane ancora valido.

È ora possibile ripetere gli argomenti visti nel paragrafo precedente. Ossia, dato un aperto A di $\mathbb{R}^3$, una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con $F = F(x, y, z)$ e un punto (x_0, y_0, z_0) appartente all'insieme Z degli zeri di F

$$Z = \{(x, y, z) \in A : F(x, y, z) = 0\}$$

in cui $DF(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, esiste un intorno aperto cilindrico[3] di (x_0, y_0, z_0) in cui Z coincide con il grafico di una funzione di x, y oppure di y, z oppure di z, x di classe C^1. Come prima, è naturale considerare il piano tangente in (x_0, y_0, z_0) al grafico di tale funzione come il piano tangente in (x_0, y_0, z_0) a Z, deduciamo la sua equazione cartesiana. Essendo $DF(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, una delle derivate parziali prime di F in (x_0, y_0, z_0) sarà diversa da zero, supponiamo ad esempio che sia $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (come esercizio, sviluppare i calcoli per uno degli altri due casi). Sia $z = f(x, y)$ la conseguente funzione implicita definita in $I_\delta(x_0, y_0)$, l'equazione del piano tangente al suo grafico in (x_0, y_0, z_0) è

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Grazie alle formule (1) e (2) in corrispondenza di $(x, y) = (x_0, y_0)$ si trova

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

o anche

$$\Big(DF(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\Big) = 0.$$

Analogamente al paragrafo precedente, concludiamo che $DF(x_0, y_0, z_0)$ è ortogonale al piano tangente e dunque a Z nel punto (x_0, y_0, z_0).

Passiamo infine alle superfici di livello di una funzione di 3 variabili $f(x, y, z)$[4]. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e $f(x, y, z) \in C^1(A)$. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la superficie di livello

$$E_c = \{(x, y, z) \in A : f(x, y, z) = c\}$$

coincide con l'insieme degli zeri della funzione $F(x, y, z) = f(x, y, z) - c$, inoltre $DF \equiv Df$. Perciò, se $(x_0, y_0, z_0) \in E_c$ e $Df(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ segue che il piano tangente in (x_0, y_0, z_0) alla superficie di livello E_c ha equazione cartesiana

$$\Big(Df(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\Big) = 0$$

e inoltre $Df(x_0, y_0, z_0)$ è ortogonale a E_c in (x_0, y_0, z_0). Concludendo, *il gradiente $Df(x_0, y_0, z_0)$, quando è diverso da 0, è ortogonale alla superficie di livello di f passante per (x_0, y_0, z_0) e punta verso la direzione di massima crescita di f.*

[3] Ad esempio, se $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ sarà della forma $I_\delta(x_0, y_0) \times (z_0 - \sigma, z_0 + \sigma)$.

[4] Attenzione! Non confondere questa f con la funzione implicita appena vista.

Libro di testo:
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, editore Liguori
oppure
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di analisi matematica due*, editore Zanichelli.