Nota integrativa sugli

Integrali doppi e tripli

Le formule di riduzione per il calcolo degli integrali tripli comprendono oltre all'integrazione per segmenti (vedere, ad esempio, il libro di testo a pag. 411 (ed. Liguori) o a pag. 308 (ed. Zanichelli)) anche quella per strati di seguito enunciata.

1 Integrazione per strati

Proposizione 1 (Integrazione per strati). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ l'unione di un numero finito di domini normali di $\mathbb{R}^3$ a due a due privi di punti interni in comune e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Posto*

$$r = \min_{(x,y,z)\in E} z \qquad e \qquad s = \max_{(x,y,z)\in E} z,$$

sia, per ogni $z \in [r, s]$, l'insieme

$$E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in E\}$$

unione di un numero finito di domini normali di $\mathbb{R}^2$ a due a due privi di punti interni in comune. Allora la funzione

$$z \longmapsto \iint_{E_z} f(x, y, z)\, dx\, dy$$

è integrabile secondo Riemann in $[r, s]$ e vale la formula

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \int_r^s \left(\iint_{E_z} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz \\ &= \int_r^s dz \iint_{E_z} f(x, y, z)\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{1}$$

Osservazione 1. Naturalmente sono valide anche le due proposizioni analoghe ottenute scambiando z con x o con y.

Osservazione 2. La formula (1) è ancora valida se E_z si riduce ad un numero finito di punti o ad una curva regolare a tratti. In questi casi si deve porre

$$\iint_{E_z} f(x, y, z)\, dx\, dy = 0.$$

Osservazione 3. Quando la funzione f è identicamente uguale ad 1 si ritrova il *principio di Cavalieri* il quale afferma che *se due solidi E e F hanno per ogni z le sezioni orizzontali E_z e F_z di area uguale, allora i volumi di questi due corpi sono uguali.*

Esempio 1. Calcoliamo il volume di una palla di raggio R. Questo è pari al valore dell'integrale

$$\iiint_{I(0,R)} dx\,dy\,dz$$

dove $I(0,R)$ indica l'intorno sferico (o palla) centrato nell'origine e di raggio R. Abbiamo

$$\iiint_{I(0,R)} dx\,dy\,dz = \int_{-R}^{R} dz \iint_{E_z} dx\,dy = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,dz = \frac{4}{3}\pi R^3$$

dove è stato utilizzato il fatto che E_z altro non è che un disco di raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$.

Esercizio 1. Calcolare il volume della calotta sferica $I(0,R) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq R - h\}$ con $0 < h < R$.

Esercizio 2. Calcolare il volume di un cono di base circolare di raggio R e altezza h.

Risultati degli esercizi

1. $\frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$, 2. $\frac{\pi R^2 h}{3}$.

Libro di testo:
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, editore Liguori oppure
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di analisi matematica due*, editore Zanichelli.