Nota integrativa sulle

Funzioni vettoriali di più variabili

1 Non validità del teorema del valor medio di Lagrange per le funzioni a valori vettoriali

Il teorema del valor medio di Lagrange, valido per le funzioni reali di più variabili, non si estende alle funzioni a valori vettoriali.

Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 in un aperto A di $\mathbb{R}^n$ e siano x e $x+h$ con $h \neq 0$ due punti di A tali che il segmento che li unisce sia anch'esso contenuto in A. Se il teorema di Lagrange valesse allora dovrebbe esistere un numero θ appartenente all'intervallo $(0, 1)$ tale che

$$f(x + h) - f(x) = df(x + \theta h)(h) = Df(x + \theta h) \cdot h, \tag{1}$$

dove i valori di f sono intesi come vettori colonna, $df(x + \theta h)(h)$ indica il differenziale di f in $x + \theta h$ valutato in h e $Df(x + \theta h) \cdot h$ denota la matrice jacobiana di f, sempre in $x + \theta h$, moltiplicata per il vettore colonna h.

Consideriamo ora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Questa funzione e le scelte $x = 0$ e $h = 2\pi$ verificano le ipotesi precedenti. Supponiamo che esista un numero θ che renda l'uguaglianza (1) vera. Dato che in questo esempio abbiamo

$$Df(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

e $x + \theta h = 2\pi\theta$, la (1) diventa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\pi\theta \\ \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} \cdot (2\pi) = 2\pi \begin{pmatrix} -\sin 2\pi\theta \\ \cos 2\pi\theta \end{pmatrix},$$

la quale è evidentemente impossibile in quanto $\cos^2 2\pi\theta + \sin^2 2\pi\theta = 1$ per qualunque numero θ. Di conseguenza il teorema di Lagrange non è valido.

Osservazione 1. Nel caso vettoriale è comunque sempre possibile applicare il teorema di Lagrange alle singole componenti di f (essendo queste funzioni a valori scalari). Nell'esempio precedente ciò significa applicare il teorema separatamente alle funzioni $\cos t$ e $\sin t$ determinando così un numero θ_1 per la prima e un altro θ_2 per la seconda.

Osservazione 2. Chiaramente, non si estende alle funzioni a valori vettoriali neanche la formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange (essendo il teorema il Lagrange un caso particolare di questa formula). Rimane invece valida la formula di Taylor con il resto nella forma di Peano (è una conseguenza immediata del caso scalare).