

Nota integrativa sulle
Forme differenziali lineari

1 Forme differenziali lineari in un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^2

Teorema 1. Sia $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ una forma differenziale lineare di classe C^1 definita in un aperto A semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 . Se ω è chiusa allora è anche esatta.

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato provando che per ogni curva γ chiusa, regolare a tratti e contenuta in A si ha

$$\oint_{\gamma} \omega = 0. \quad (1)$$

Assumiamo inizialmente che γ sia anche semplice e orientiamola in senso antiorario. Poichè A è semplicemente connesso, γ coinciderà con la frontiera di un dominio limitato D contenuto in A . Inoltre si può dimostrare che, essendo γ regolare a tratti, D è un dominio regolare. Possiamo quindi applicare le formule di Gauss-Green, troviamo

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \oint_{\gamma} a dx + \oint_{\gamma} b dy = - \iint_D a_y dx dy + \iint_D b_x dx dy \\ &= \iint_D (b_x - a_y) dx dy = 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla chiusura di ω .

Nel caso in cui γ non sia una curva semplice si ricava ancora la (1) riducendosi alla situazione precedente (γ semplice). Tralasciamo questa parte della dimostrazione.

In conclusione, la (1) è provata e, di conseguenza, anche il teorema. \square

2 Il calcolo delle primitive

Mostriamo, attraverso alcuni esempi, come si possono determinare le primitive di una forma differenziale lineare esatta (le quali, in un aperto connesso, differiscono solo per una costante additiva).

Esempio 1. Stabilire se la forma $\omega = 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$ è esatta nel suo dominio di definizione e, in tal caso, calcolarne le primitive.

Soluzione. La forma è definita in tutti i punti del piano \mathbb{R}^2 , inoltre è chiusa in quanto

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2).$$

Essendo \mathbb{R}^2 semplicemente connesso, grazie al teorema 2 nel paragrafo 71 del libro di testo concludiamo che ω è esatta.

Per trovare una primitiva sfruttiamo un'idea contenuta nella dimostrazione del teorema 2 nel paragrafo 70 del libro di testo. Ovvero, se è noto che la forma ω è esatta in un aperto connesso A , si può costruire una sua primitiva $f(x, y)$ scegliendo un punto (x_0, y_0) in A e definendo $f(x, y)$ come

$$f(x, y) = \int_{\gamma} \omega \quad (2)$$

dove γ è una qualunque curva regolare a tratti contenuta in A che parte da (x_0, y_0) e arriva in (x, y) . L'esito positivo di questo metodo dipende ovviamente dal fatto che l'integrale (2) sia effettivamente calcolabile, in generale ciò non sarà sempre possibile.

In questo esempio scegliamo come punto (x_0, y_0) l'origine e come curva γ il segmento orientato che parte dall'origine e arriva ad un generico $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (si noti che la curva γ , come è richiesto da questo metodo, è interamente contenuta nel dominio della forma ω). Tuttavia, per compiere i calcoli che seguono indichiamo questo generico punto con (x_1, y_1) in quanto le lettere x e y ci occorreranno per scrivere la parametrizzazione del segmento, alla fine del calcolo sostituiranno (x_1, y_1) con (x, y) . Il segmento orientato γ è parametrizzato dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x_1 t \\ y = y_1 t \end{cases}, \quad t \in [0, 1],$$

da cui segue $dx = x_1 dt$, $dy = y_1 dt$ e dunque

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (2x_1^2 y_1 t^2 + (x_1^2 + y_1^2) y_1 t^2) dt \\ &= (3x_1^2 y_1 + y_1^3) \int_0^1 t^2 dt = x_1^2 y_1 + \frac{y_1^3}{3}. \end{aligned}$$

Tornando alle lettere x e y e aggiungendo la costante additiva, ricaviamo tutte le primitive di ω :

$$f(x, y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 2. Studiare l'esattezza della forma $\omega = 2xy \sin z \, dx + x^2 \sin z \, dy + x^2 y \cos z \, dz$ nel suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne le primitive.

Soluzione. La forma è definita in tutti i punti dello spazio \mathbb{R}^3 , inoltre è chiusa in quanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(2xy \sin z) &= 2x \sin z = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin z), \\ \frac{\partial}{\partial z}(2xy \sin z) &= 2xy \cos z = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y \cos z), \\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2 \sin z) &= x^2 \cos z = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y \cos z). \end{aligned}$$

Come nell'esempio 1, poichè \mathbb{R}^3 è semplicemente connesso, possiamo concludere che ω è una forma esatta. Calcoliamo le primitive seguendo la tecnica usata nell'esempio 1 ma, invece di scegliere come curva γ il segmento che unisce $(0, 0, 0)$ a (x_1, y_1, z_1) (scelta possibile che però rende più insidioso il calcolo dell'integrale di ω , farlo come ulteriore esercizio), prendiamo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ dove γ_1, γ_2 e γ_3 sono i tre segmenti che uniscono rispettivamente e nell'ordine $(0, 0, 0)$ a $(x_1, 0, 0)$, $(x_1, 0, 0)$ a $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_1, y_1, 0)$ a (x_1, y_1, z_1) . I segmenti orientati γ_1, γ_2 e γ_3 sono parametrizzati da

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x_1 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 t \\ z = 0 \end{cases} \quad \gamma_3 : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 t \end{cases}, \quad t \in [0, 1],$$

da cui segue $dx = x_1 dt, dy = dz = 0$ per γ_1 , $dy = y_1 dt, dx = dz = 0$ per γ_2 e $dz = z_1 dt, dx = dy = 0$ per γ_3 . Passando al calcolo di f si trova

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1) &= \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega \\ &= \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 x_1^2 y_1 z_1 \cos z_1 t \, dt \\ &= x_1^2 y_1 (\sin z_1 t) \Big|_0^1 = x_1^2 y_1 \sin z_1. \end{aligned}$$

Per cui le primitive di ω sono date dalla formula

$$f(x, y, z) = x^2 y \sin z + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 3. Stabilire se la forma $\omega = (2x + y^3) dx + 3xy^2 dy$ è esatta nel suo dominio di definizione e, in tal caso, calcolarne le primitive.

Soluzione. La forma ω è definita in \mathbb{R}^2 (aperto semplicemente connesso) ed è chiusa poichè

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + y^3) = 3y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2),$$

di conseguenza è anche esatta. Illustriamo qui un metodo diverso da quello visto negli esempi precedenti. Sia $f(x, y)$ una primitiva di ω , per definizione le sue derivate parziali prime devono coincidere con i coefficienti di ω , cioè

$$\begin{cases} f_x = 2x + y^3 \\ f_y = 3xy^2. \end{cases}$$

Integriamo ora (nel senso dell'integrale indefinito) la prima equazione rispetto alla variabile x avendo l'accortezza di inserire un termine additivo costante rispetto a x (la variabile di integrazione) ma che può tuttavia dipendere da y . Questo termine additivo è quindi rappresentato da una funzione dipendente da y che indichiamo con $\varphi(y)$

$$\begin{cases} f = x^2 + xy^3 + \varphi(y) \\ f_y = 3xy^2. \end{cases}$$

Deriviamo ora la prima equazione rispetto a y e sostituiamola nella seconda

$$\begin{cases} f = x^2 + xy^3 + \varphi(y) & f = x^2 + xy^3 + \varphi(y) \\ 3xy^2 + \varphi'(y) = 3xy^2, & \varphi'(y) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $\varphi(y) = c$ dove c è una costante arbitraria e concludiamo che le primitive di ω sono date da

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Naturalmente, è possibile fare questi calcoli anche scambiando il ruolo delle variabili x e y .

Esempio 4. Studiare l'esattezza della forma $\omega = (xy - \sin z) dx + (x^2/2 - e^y/z) dy + (e^y/z^2 - x \cos z) dz$ nel suo dominio di definizione ed eventualmente calcolarne le primitive (se il dominio non è connesso scegliere una componente connessa in cui studiare ω).

Soluzione. In questo caso la forma ω è definita in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$ il quale è un insieme aperto ma non è connesso, infatti è formato da due componenti connesse. Queste componenti sono i semispazi aperti $\{z > 0\}$ e $\{z < 0\}$, scegliamone uno, ad esempio il primo, e qui studiamo la forma ω . Dato che

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(xy - \sin z) &= x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2/2 - e^y/z), \\ \frac{\partial}{\partial z}(xy - \sin z) &= -\cos z = \frac{\partial}{\partial x}(e^y/z^2 - x \cos z), \\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2/2 - e^y/z) &= e^y/z^2 = \frac{\partial}{\partial y}(e^y/z^2 - x \cos z),\end{aligned}$$

la forma è chiusa e, poichè $\{z > 0\}$ è semplicemente connesso (in quanto è omeomorfo ad \mathbb{R}^3), è anche esatta. Calcoliamo le sue primitive usando il metodo visto nell'esempio precedente. Sia dunque $f(x, y, z)$ una primitiva di ω , si deve avere

$$\begin{cases} f_x = xy - \sin z \\ f_y = x^2/2 - e^y/z \\ f_z = e^y/z^2 - x \cos z. \end{cases}$$

Iniziamo integrando la prima equazione rispetto alla variabile x , ricordiamo che è necessario aggiungere un termine costante rispetto a x che però può dipendere da y e da z . Questo termine è rappresentato da una funzione dipendente da y e da z che indichiamo con $\varphi(y, z)$, abbiamo

$$\begin{cases} f = x^2y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ f_y = x^2/2 - e^y/z \\ f_z = e^y/z^2 - x \cos z, \end{cases}$$

deriviamo la prima equazione rispetto a y e a z e sostituiamo i risultati nella seconda e nella terza

$$\begin{cases} f = x^2y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ x^2/2 + \varphi_y = x^2/2 - e^y/z \\ -x \cos z + \varphi_z = e^y/z^2 - x \cos z, \end{cases} \quad \begin{cases} f = x^2y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ \varphi_y = -e^y/z \\ \varphi_z = e^y/z^2. \end{cases}$$

Ricaviamo ora φ usando soltanto le ultime due equazioni e seguendo un procedimento analogo a quello visto nell'esempio precedente. Integriamo la seconda equazione rispetto a y e aggiungiamo un termine costante rispetto a y ma, in generale, dipendente da z

$$\begin{cases} f = x^2 y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ \varphi = -e^y/z + \psi(z) \\ \varphi_z = e^y/z^2, \end{cases}$$

deriviamo la seconda equazione rispetto a z , sostituiamola nella terza e semplifichiamo, troviamo

$$\begin{cases} f = x^2 y/2 - x \sin z + \varphi(y, z) \\ \varphi = -e^y/z + \psi(z) \\ \psi' = 0. \end{cases}$$

Procedendo a ritroso, troviamo $\psi(z) = c$ dove c è una costante arbitraria, $\varphi(y, z) = -e^y/z + c$ e

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y}{2} - x \sin z - \frac{e^y}{z} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Anche in questo esempio è ovviamente possibile scambiare i ruoli delle variabili x, y e z . Osserviamo inoltre che anche scegliendo il semispazio $\{z < 0\}$ si troverebbe la formula (3).

Libro di testo:

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, editore Liguori oppure

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di analisi matematica due*, editore Zanichelli.