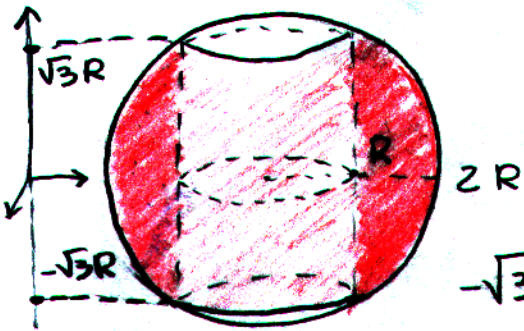


# Esercizio 1. Soluzione

L'insieme  $E$  è la regione di spazio interna alla palla chiusa centrata nell'origine e di raggio  $2R$  e esterna al cilindro avente asse coincidente con l'asse  $z$  e raggio  $R$ .



In coordinate cilindriche  $E$  è descritto da

$$-\sqrt{3}R \leq z \leq \sqrt{3}R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$R \leq \rho \leq \sqrt{4R^2 - z^2}.$$

Quindi l'integrale diventa

$$\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} \int_{\rho=R}^{\sqrt{4R^2-z^2}} \rho^2 \rho d\rho dz d\theta$$

$$= 2\pi \int_{-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} \frac{(4R^2 - z^2)^2 - R^4}{4} dz = \frac{\pi}{2} \int_{-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} (15R^4 - 8R^2z^2 + z^4) dz$$

$$= \frac{44\sqrt{3}}{5} \pi R^5.$$