Nota integrativa di

Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

1 Notazioni degli operatori topologici

Sia dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$. Allora $\overset{\circ}{A}$ denota l'insieme dei punti interni di A (detto *interno* di A), $\overline{A}$ denota la *chiusura* di A, FrA e ∂A indicano l'insieme dei suoi punti di frontiera (il quale è detto *frontiera* o *bordo* di A) e infine A' denota l'insieme dei punti di accumulazione di A (chiamato *derivato* di A). Per le definizioni di punto interno, di chiusura, di punto di frontiera e di punto di accumulazione vedere il paragrafo 25 del libro di testo.

2 Successioni in $\mathbb{R}^n$

La nozione di successione di numeri reali si estende immediatamente a quella di successione a valori in $\mathbb{R}^n$, inoltre anche la teoria nota in $\mathbb{R}$ si estende al caso vettoriale senza particolari novità. Di seguito elenchiamo rapidamente i risultati basilari sulle successioni in $\mathbb{R}^n$.

Indicheremo una successione a valori vettoriali con la notazione $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ dove $x^k \in \mathbb{R}^n$ per $k = 1, 2, 3, \ldots$, più esplicitamente abbiamo:

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1),\ x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2), \ldots, x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k), \ldots$$

Esempio 1. Le successioni $x^k = (x_1^k, x_2^k) = (k, 1/k)$ e $x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k) = (k+1, 1, e^k)$ sono rispettivamente a valori in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1 (Convergenza di una successione in $\mathbb{R}^n$). Assegnata una successione $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ con $x^k \in \mathbb{R}^n$ per ogni k e $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, si dice che x^k converge ad ℓ se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \ : \ k \geq N_\epsilon \Rightarrow |x^k - \ell| < \epsilon,$$

dove con $|x^k - \ell|$ denotiamo la norma (in $\mathbb{R}^n$) di $x^k - \ell$.

Analogamente al caso reale, la convergenza appena definita si indica con

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \ell$$

oppure con

$$x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Osservazione 1. Un altro simbolo spesso utilizzato per indicare la norma in $\mathbb{R}^n$ è $\|\cdot\|$, in altre parole $\|x^k - \ell\| = |x^k - \ell|$.

Esercizio 1. Verificare che la successione $x^k = (1/k, 1)$ converge a $(0, 1)$.

Come afferma la seguente proposizione, la convergenza di una successione a valori vettoriali è equivalente alla convergenza delle successioni reali ottenute considerando le componenti della n-upla x^k. Più precisamente

Proposizione 1. *Data una successione $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}^n$ e $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$, allora*

$$x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell \iff x_1^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \,, \dots,\; x_n^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell_n.$$

Dimostrazione. Per maggiore chiarezza, dato che in ciò che segue comparirà anche il valore assoluto di un numero reale, denotiamo in questa dimostrazione la norma in $\mathbb{R}^n$ con il simbolo $\|\cdot\|$. Con questa convenzione abbiamo

$$\|x^k - \ell\| = |x^k - \ell| = \sqrt{(x_1^k - \ell_1)^2 + \cdots + (x_n^k - \ell_n)^2}.$$

La dimostrazione è una semplice conseguenza delle definzioni di limite coinvolte.

Sia x^k convergente a ℓ. Fissato $\epsilon > 0$ esisterà un numero N_ϵ tale che se $k \geq N_\epsilon$ allora $\|x^k - \ell\| < \epsilon$. Ma quindi si avrà anche (dove ora $|\cdot|$ denota il valore assoluto di un numero reale)

$$|x_i^k - \ell_i| \leq \sqrt{(x_1^k - \ell_1)^2 + \cdots + (x_n^k - \ell_n)^2} = \|x^k - \ell\| < \epsilon$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, cioè scopriamo che ogni successione reale x_i^k converge a ℓ_i per $i = 1, \dots, n$.

Viceversa, sia x_i^k convergente a ℓ_i per $i = 1, \dots, n$. Fissato $\epsilon > 0$, per ogni $i = 1, \dots, n$ esisterà un numero $N_{i,\epsilon}$ tale che se $k \geq N_{i,\epsilon}$ allora $|x_i^k - \ell_i| < \epsilon$. Posto $N_\epsilon = \max\{N_{1,\epsilon}, \dots, N_{n,\epsilon}\}$ segue che se $k \geq N_\epsilon$ allora $|x_i^k - \ell_i| < \epsilon$ per $i = 1, \dots, n$. Sempre per tali valori di k si avrà anche

$$\|x^k - \ell\| = \sqrt{(x_1^k - \ell_1)^2 + \cdots + (x_n^k - \ell_n)^2} < \sqrt{\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^2} = \sqrt{n}\epsilon$$

Ora, essendo n una costante, la quantità $\sqrt{n}\epsilon$ può essere resa piccola a piacere. Questo dimostra che x^k converge a ℓ. (Volendo ottenere esattamente ϵ nell'ultimo termine è sufficiente scegliere $\epsilon/\sqrt{n}$ per determinare i numeri $N_{i,\epsilon}$, verificarlo come esercizio.) $\square$

Definizione 2. Una successione a valori vettoriali $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ si dice limitata se esiste una costante reale M tale che $|x^k| \leq M$ per ogni $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Osservazione 2. Come per le successioni reali valgono i teoremi di unicità del limite, della limitatezza delle successioni convergenti e dello scambio dell'operazione di limite con quella di somma. Per quanto riguarda invece lo scambio tra l'operazione di limite e quella di prodotto (valida per le successioni reali convergenti) nel caso vettoriale sono possibili (almeno) due differenti prodotti: una successione vettoriale moltiplicata scalarmente per una successione reale oppure due successioni vettoriali moltiplicate mediante il prodotto scalare. In entrambi i casi, se le successioni date sono convergenti, è possibile scambiare l'operazione di prodotto e quella di limite.

Proposizione 2. *Siano $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ successioni in $\mathbb{R}^n$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione reale, ℓ ed m in $\mathbb{R}^n$ e α in $\mathbb{R}$. Allora valgono le implicazioni*

$$x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell \quad e \quad \alpha_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha_k x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha\ell,$$

$$x^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell \quad e \quad y^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} m \quad \Longrightarrow \quad (x^k, y^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (\ell, m).$$

Osservazione 3. Con (x^k, y^k) indichiamo il prodotto scalare tra x^k e y^k, altre possibili notazioni sono $\langle x^k, y^k \rangle$ e $x^k \cdot y^k$.

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 1, le due implicazioni sono conseguenze immediate delle proprietà note nel caso reale sullo scambio tra le operazioni di somma e prodotto con quella di limite. □

Per concludere, osserviamo che si estendono in maniera ovvia pure le nozioni di sottosuccessione e di successione di Cauchy. Anche nel caso vettoriale ogni successione limitata possiede una sottosuccessione convergente mentre una successione è convergente se e solo se è di Cauchy.

3 Compattezza

Definizione 3. Un insieme K contenuto in $\mathbb{R}^n$ si dice *compatto per successioni* se da ogni successione di elementi di K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di K.

Teorema 1 (Teorema di Heine-Borel). *Sia K contenuto in $\mathbb{R}^n$. Allora K è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato.*

Definizione 4. Un insieme K contenuto in $\mathbb{R}^n$ si dice *compatto per ricoprimenti* se da ogni famiglia di insiemi aperti, la cui unione contiene K, è possibile estrarre una famiglia finita la cui unione ancora contiene K.

Teorema 2. *Sia K contenuto in $\mathbb{R}^n$. Allora K è compatto per ricoprimenti se e solo se è compatto per successioni.*