

## Programma del corso di Analisi Matematica 3

### Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

Richiami delle nozioni di: norma, intorno circolare, punti interni, punti di frontiera, punti di accumulazione, punti isolati, insiemi aperti, insiemi chiusi, chiusura di un insieme; dominio (= chiusura di un insieme aperto), insiemi limitati, successioni in  $\mathbb{R}^n$  e definizione di convergenza, legame con le successioni componenti (cd), compattezza per successioni (o sequenziale), teorema di Heine-Borel, compattezza per ricoprimenti, equivalenza tra le due nozioni di compattezza, aperti connessi.

*Paragrafo 25 in FMS e nota integrativa.*

### Funzioni reali (o scalari) di più variabili

Insieme di definizione, grafico di una funzione, insiemi di livello (linee e superfici di livello).

Limiti di funzioni, continuità, teorema di Weierstrass, teorema di Cantor.

Derivate parziali, derivate parziali in un dominio, relazione tra derivabilità e continuità, derivate parziali seconde, matrice hessiana, teorema di Schwarz, gradiente, differenziabilità, relazione tra differenziabilità e derivabilità, differenziale, base canonica in  $(\mathbb{R}^n)^*$ , iperpiano tangente, relazione tra differenziabilità e continuità (cd), teorema del differenziale (cd), funzioni di classe  $C^k$ , derivazione delle funzioni composte (1° caso:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) (cd), derivazione delle funzioni composte (2° caso:  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ), derivate direzionali, derivata direzionale di una funzione differenziabile (cd), direzione di massima pendenza (o massima crescita), funzioni con il gradiente nullo in un aperto connesso (cd), funzioni definite mediante integrali, teorema del valor medio di Lagrange (cd), formula di Taylor al primo ordine con il resto di Lagrange, formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Peano, differenziale secondo.

*Paragrafi 3A e 3B in MS1, paragrafi 17,23, da 26 a 32, 34, 35 in FMS.*

### Massimi e minimi relativi

Matrici definite, semidefinite e indefinite, teorema sulla caratterizzazione delle matrici simmetriche in termini degli autovalori, caratterizzazione nel caso delle matrici  $2 \times 2$ , caratterizzazione delle matrici definite (cd), definizioni di punto di minimo relativo e di massimo relativo, punti stazionari, condizione necessaria del primo ordine (cd), punti di sella, condizione necessaria del secondo ordine, condizione sufficiente del secondo ordine (cd), determinante hessiano, condizione sufficiente del secondo ordine in due variabili (cd).

*Paragrafi 36, 37 e pag. 205 (ed. Liguori) o pag. 149 (ed. Zanichelli) in FMS.*

### Funzioni vettoriali di più variabili

Funzioni componenti, limiti e relazione con i limiti delle funzioni componenti, continuità, derivabilità, matrice jacobiana (sul libro chiamata anche gradiente), determinante jacobiano, differenziabilità, differenziale, teorema di differenziabilità di una funzione vettoriale (cd), funzioni di classe  $C^0$  e  $C^1$ , teorema di rappresentazione della matrice jacobiana di una funzione composta (3° caso:  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ), teorema di rappresentazione del differenziale di una funzione composta.

*Paragrafo 38 in FMS e nota integrativa.*

### Curve e integrali curvilinei di prima specie

Definizione di curva, curve semplici, chiuse, regolari, regolari a tratti, vettore tangente, versore tangente, equazione cartesiana ed equazione polare di una curva piana, cambiamenti ammissibili di parametro, curve equivalenti, orientazione e curve orientate, lunghezza di una curva, curve rettificabili, teorema di rettificabilità delle curve di classe  $C^1$ , integrale curvilineo di una funzione (integrale curvilineo di prima specie).

*Paragrafi da 60 a 63 in FMS.*

### Forme differenziali lineari

Campi vettoriali, lavoro di un campo vettoriale, forme differenziali lineari, corrispondenza tra forme differenziali e campi vettoriali, integrale di una forma differenziale (integrale curvilineo di seconda specie), forme differenziali esatte, primitive, teorema sull'integrale di una forma esatta (cd), caratterizzazione delle forme esatte (cd), campi vettoriali conservativi e funzione potenziale, forme in  $\mathbb{R}^2$  chiuse, relazione tra esattezza e chiusura di una forma, aperti semplicemente connessi in  $\mathbb{R}^2$ , forme differenziali in un aperto semplicemente connesso di  $\mathbb{R}^2$  (cd), forme in  $\mathbb{R}^3$  chiuse, forme in  $\mathbb{R}^n$  chiuse, campi vettoriali in  $\mathbb{R}^3$  irrotazionali, rotore di un campo in  $\mathbb{R}^3$ , aperti di  $\mathbb{R}^n$  semplicemente connessi, forme differenziali in un aperto semplicemente connesso di  $\mathbb{R}^n$ , calcolo delle primitive.

*Paragrafo 38, paragrafi da 68 a 73 in FMS e nota integrativa.*

### Integrali doppi e tripli

Domini normali di  $\mathbb{R}^2$ , misura (o area) di un dominio normale, partizione di un dominio normale, additività della misura, somme integrali, definizione di integrabilità per una funzione limitata in un dominio normale di  $\mathbb{R}^2$  e definizione del suo integrale doppio, integrabilità delle funzioni continue, formule di riduzione per gli integrali doppi (cd), domini normali regolari di  $\mathbb{R}^2$ , domini regolari di  $\mathbb{R}^2$ , orientazione positiva della frontiera di un dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$ , formule di Gauss-Green (cd), teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi, esempi di cambiamenti di coordinate (lineari e polari).

Domini normali di  $\mathbb{R}^3$ , misura (o volume) di un dominio normale, domini normali regolari di  $\mathbb{R}^3$ , integrabilità di una funzione limitata in un dominio normale di  $\mathbb{R}^3$ , integrale triplo, integrabilità delle funzioni continue, formule di riduzione (integrazione per segmenti o fili), formule di riduzione (integrazione per strati o fette), domini regolari di  $\mathbb{R}^3$ , formula di cambiamento di variabili negli integrali tripli, le coordinate cilindriche e le coordinate sferiche.

*Paragrafi da 74 a 78 in FMS e nota integrativa.*

### Superfici e integrali di superficie

Definizione di superficie regolare, superfici cartesiane, versore normale, area di una superficie regolare, superfici regolari a tratti, cambiamenti ammissibili di parametri, superfici regolari equivalenti, superfici orientabili, orientazione e superfici orientate, integrale di superficie di una funzione scalare, flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata, il teorema della divergenza, superficie regolare con bordo, orientazione positiva del bordo, formula di Stokes.

*Paragrafi da 94 a 96, pag. 568, 572 e 573, paragrafi da 98 a 100 in FMS e nota integrativa (ed. Liguori) oppure*

*Paragrafi da 98 a 100, pag. 462 e 465, paragrafi da 102 a 104 in FMS e nota integrativa (ed. Zanichelli).*

**I teoremi della funzione implicita e della funzione inversa**

Il teorema della funzione implicita (o teorema del Dini) (cd), teorema sulla derivazione delle funzioni implicite, retta tangente ad una linea di livello.

Il teorema del Dini per funzioni di più variabili, piano tangente ad una superficie di livello.

Invertibilità locale, il teorema della funzione inversa (o di invertibilità locale).

*Paragrafi 101 e 103 in FMS e nota integrativa (ed. Liguori)*

*oppure*

*Paragrafi 105 e 107 in FMS e nota integrativa (ed. Zanichelli).*

**Massimi e minimi vincolati**

Definizioni di punto di massimo (risp. minimo) assoluto vincolato e massimo (risp. minimo) relativo vincolato; definizione di punto stazionario vincolato e legame con i punti di estremo relativo vincolato (cd), il metodo dei moltiplicatori di Lagrange in due e tre variabili.

*Nota integrativa.*

La sigla cd significa “con dimostrazione”.

Le indicazioni di cui sopra sono riferite ai libri:

FMS: N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, editore Liguori

*oppure*

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di analisi matematica due*, editore Zanichelli,

MS1: P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Matematica*, 2° Volume, parte prima, editore Liguori

*oppure*

P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Analisi Matematica Due*, prima parte, editore Zanichelli,

MS2: P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Matematica*, 2° Volume, parte seconda, editore Liguori

*oppure*

P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Analisi Matematica Due*, seconda parte, editore Zanichelli.

Le note integrative e altre informazioni sul corso sono disponibili all'indirizzo:

[https://web.unica.it/unica/page/it/fabrizio\\_cuccu\\_mat\\_analisi\\_matematica\\_3\\_8\\_cfu\\_per\\_gli\\_immatricolati\\_dallaa\\_202324](https://web.unica.it/unica/page/it/fabrizio_cuccu_mat_analisi_matematica_3_8_cfu_per_gli_immatricolati_dallaa_202324)

Docente:

*Fabrizio Cuccu*

Dipartimento di Matematica e Informatica, Palazzo delle Scienze (primo piano), via Ospedale 72, Cagliari.

Email: [fcuccu@unica.it](mailto:fcuccu@unica.it), tel. 0706758510.