

Università di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Geometria 1
10 luglio 2024

Esercizio 1

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 a coefficienti reali, e l'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tale che

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b, a + c, a + d),$$

per ogni $p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$.

a) Verificare che l'insieme

$$W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : f(p) \text{ e } (1,2,0) \text{ sono linearmente dipendenti}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Trovare una base di W .

c) Si trovi una base dell'immagine di $g \circ f$, dove $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 e alla base $\{(1,1), (0,-1)\}$ di \mathbb{R}^2 è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 & + kx_3 & + x_4 & + x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + kx_2 & + 2kx_3 & + 2x_4 & & = & 0 \\ x_1 & + 2x_2 & + x_3 & + x_4 & & = & h - 1 \end{cases}$$

- Stabilire per quali valori dei parametri reali k e h l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 .
- Trovare gli eventuali valori dei parametri reali k e h affinché lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema abbia dimensione 3. In corrispondenza di tali valori trovare una base di tale sottospazio.

Esercizio 3

Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali, e

$$f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare tale che $f(A) = A^t + A$, per ogni $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f .