LE SOLUZIONI DELL'ESAME DI GEOMETRIA 1 - 10/07/24

ESERCIZIO 1

a) Siano $p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W$
$p' = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3$

e siano $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Dobbiamo verificare che $\lambda p + \lambda' p' \in W$ cioè che $f(\lambda p + \lambda' p')$ e $(1,2,0)$ sono lin. dipendenti.

Osserviamo che

$$f(\lambda p + \lambda' p') \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineare}}}{=} \lambda f(p) + \lambda' f(p').$$

Ora $p \in W \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \; f(p) = \alpha \cdot (1,2,0)$
$p' \in W \Rightarrow \exists\, \alpha' \in \mathbb{R} : \; f(p') = \alpha' \cdot (1,2,0)$

Allora
$$\begin{aligned} f(\lambda p + \lambda' p') &= \lambda f(p) + \lambda' f(p') \\ &= (\lambda\alpha)(1,2,0) + (\lambda'\alpha')(1,2,0) \\ &= (\lambda\alpha + \lambda'\alpha') \cdot (1,2,0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(\lambda p + \lambda' p')$ e $(1,2,0)$ sono linearmente dipendenti.

b) Troviamo una base di W.

A tal fine cerchiamo di capire come sono fatti i vettori di W.

$p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W \iff f(p) = (a+b, a+c, a+d)$

e $(1,2,0)$ sono linearmente dipendenti $\iff$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} a+b & a+c & a+d \\ \boxed{1} & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \iff$$

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} a+b & a+d \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b - a - c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$$

Troviamo le soluzioni del sistema. La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} a + 2b = s \\ a = -t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c = s \\ d = t \end{array}$$

da cui $\quad a = -t, \quad b = \frac{s+t}{2}, \quad c = s, \quad d = t.$

Quindi $\quad p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W \iff$

$p = -t + \frac{s+t}{2} x + sx^2 + tx^3$ per qualche $s, t \in \mathbb{R}$

In conclusione

$$W = \left\{ -t + \frac{s+t}{2} x + sx^2 + tx^3 : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t\left(-1 + \frac{1}{2}x + x^3\right) + s\left(\frac{1}{2}x + x^2\right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(-1 + \frac{1}{2}x + x^3, \ \frac{1}{2}x + x^2\right)$$

Poiché $-1 + \frac{1}{2}x + x^3$ e $\frac{1}{2}x + x^2$ sono lin. indipen-denti (non sono proporzionali), concludiamo che

$\left\{ -1 + \frac{1}{2}x + x^3, \ \frac{1}{2}x + x^2 \right\}$ è base di W.

c) Troviamo la matrice associata a $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e la base canonica B_c di $\mathbb{R}^3$.

Essa è data da

$$M_{B B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza la matrice associata di $g \circ f$ rispetto a B e $B' = \{(1,1), (0,-1)\}$ è

$$M_{BB'}(g \circ f) = M_{B_c B'}(g) \cdot M_{B B_c}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_3[x] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ B & & B_c & & B' \end{array}$$

Troviamo una base di $\ker(g \circ f)$.

$$p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \ker(g \circ f) \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

rango 2

$$\begin{cases} 2a + b - c + 2d = 0 \\ a + 2b + c - 2d = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2a + b = s - 2t \\ a + 2b = -s + 2t \end{cases} \qquad \begin{matrix} c = s \\ d = t \end{matrix}$$

da cui $a = \dfrac{1}{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \det\begin{pmatrix} s-2t & 1 \\ -s+2t & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{2s - 4t + s - 2t}{3} = \frac{3s - 6t}{3} = s - 2t$$

$$b = s - 2t - 2a = s - 2t - 2s + 4t = -s + 2t$$

Quindi

$$\ker(g \circ f) = \{ s - 2t + (-s + 2t)x + sx^2 + tx^3 : s, t \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ s(1 - x + x^2) + t(-2 + 2x + x^3) : s, t \in \mathbb{R} \}$$
$$= L(1 - x + x^2, \ -2 + 2x + x^3)$$

Una base di $\ker(g \circ f)$ è data da $\{1 - x + x^2, -2 + 2x + x^3\}$

Passiamo a $\operatorname{Im}(g \circ f)$.

Dalla teoria sappiamo che

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = L((g \circ f)(1), (g \circ f)(x), (g \circ f)(x^2), (g \circ f)(x^3))$$

Ma, conoscendo $M_{BB'}(g \circ f)$, sappiamo anche che

$$(g\circ f)(1) = 2\cdot(1,1) + 1\cdot(0,-1) = (2,1)$$

$$(g\circ f)(x) = 1(1,1) + 2(0,-1) = (1,-1)$$

$$(g\circ f)(x^2) = -1(1,1) + 1(0,-1) = (-1,-2)$$

$$(g\circ f)(x^3) = 2(1,1) - 2(0,-1) = (2,4)$$

Quindi

$$\mathrm{Im}(g\circ f) = L((2,1),(1,-1),(-1,-2),(2,4))$$
$$= L((2,1),(1,-1))$$

Una base di $\mathrm{Im}(g\circ f)$ è $\{(2,1),(1,-1)\}$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x_1 + kx_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + 2kx_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = h-1 \end{cases}$$

a) Dalla teoria generale sappiamo che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare costituisce un sottospazio (in questo caso di $\mathbb{R}^5$) se e solo se il sistema è omogeneo, cioè $h-1=0$, cioè $h=1$.

b) Lo spazio delle soluzioni ha dimensione pari a

$$\dim(V_A) = 5 - rg(A)$$

$$= 5 - rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 & \\ 2 & k & 2k & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim(V_A) = 3 \iff rg\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} & k & 1 & 1 \\ 2 & k & 2k & 2 & 0 \\ \boxed{1 \quad 2} & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Si noti che $\forall k \in \mathbb{R}$ $rg(A) \geq 2$,

dato che $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$. Consideriamo gli orlati di tale minore. Affinché $rg(A) = 2$ si deve avere che

Tutti gli orlati di ordine 3 abbiano det $= 0$:

$$\begin{cases} 0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 2k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = k + 4k - k^2 - 4k = k(1-k) \\ 0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ \forall k \in \mathbb{R} \text{ (due colonne uguali)} \\ 0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k(1-k) = 0 \\ k - 4 = 0 \end{cases}$$

In conclusione, non c'è alcun valore di k per il quale tutti i minori di ordine 3 si annullano.

Pertanto $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim(V_A) > 2$.

ESERCIZIO 3

Consideriamo la base $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ dove $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Allora

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1$$

$$f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$$

$$f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$$

$$f(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2E_4$$

e quindi $M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Troviamo gli autovalori.

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 \left((1-\lambda)^2 - 1 \right) = (2-\lambda)^2 (1-\lambda-1)(1-\lambda+1)$$

$$= \lambda (2-\lambda)^3.$$

Vi sono dunque due autovalori: 0 (molteplicità algebrica 1) e 2 (molteplicità algebrica 3).

Troviamo gli autospazi.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V(2) \iff f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_3 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \iff x_2 - x_3 = 0$$

Pongo $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = z$. Allora $x_2 = x_3 = t$.

Allora $V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ t & z \end{pmatrix} : s, t, z \in \mathbb{R} \right\}$

$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Si noti che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti

poiché rango $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 3.$

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $V(3)$.

Dunque $\underset{\dim V(3)}{\underset{\parallel}{m_g(3)}} = 3 = m_a(3)$

Infine $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V(0) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0, & x_4 = 0, \\ x_3 = s, & x_2 = -s \end{matrix}$

Quindi $V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Chiaramente $m_g(0) = m_a(0)$.

f è allora diagonalizzabile e una base di $M_2(\mathbb{R})$ formata da autovettori di f è

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$