

Università di Cagliari  
Corso di Laurea in Matematica  
**Prova scritta di Geometria 1**  
12 giugno 2024

**Esercizio 1**

Si consideri l'applicazione lineare  $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, 2a + d).$$

Siano

$$W_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : f(A) \in L(1,2)\}$$

e

$$W_2 = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) : A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A\right\}.$$

- a) Verificare che  $W_1$  e  $W_2$  sono sottospazi vettoriali di  $M_2(\mathbb{R})$
- b) Trovare una base di  $W_1$  e una base di  $W_2$
- c) Dire se la somma  $W_1 + W_2$  è diretta. In caso affermativo, trovare una base di  $W_1 \oplus W_2$ ; in caso negativo, trovare una matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  esprimibile in due decomposizioni distinte come somma di un vettore di  $W_1$  e di un vettore di  $W_2$ .

**Esercizio 2**

Si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + kx_4 = 1 \\ x_1 + (k+2)x_2 - x_3 + 2kx_4 = 1 \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  il sistema è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

**Esercizio 3**

Sia  $f_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che, rispetto alla base  $B = \{(2,1,1), (1,2,-1), (1,0,0)\}$ , è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1-k & 3 \end{pmatrix}$$

Stabilire per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f_k$  è diagonalizzabile. Inoltre, in corrispondenza di tali valori, trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $f_k$ .