LE SOLUZIONI DELL'ESAME SCRITTO DI GEOMETRIA 1 DEL 10/06/2024

ESERCIZIO 1

a) • Siano $A, B \in W_1$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora

$$f(\lambda A + \lambda B) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineare}}}{=} \lambda \cdot f(A) + \mu \cdot f(B)$$

Ora,

$$\left.\begin{array}{l} A \in W_1 \Rightarrow f(A) \in L(1,2) \\ B \in W_1 \Rightarrow f(B) \in L(1,2) \end{array}\right\} \xRightarrow{L(1,2) \text{ sottospazio}} \lambda f(A) + \mu f(B) \in L(1,2)$$

Quindi $f(\lambda A + \mu B) \in L(1/2)$, da cui $\lambda A + \mu B \in W_1$.

• Siano $A, B \in W_2$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora

$$(\lambda A + \mu B) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \Big(\underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A \in W_2 \to \, = A}\Big) + \mu \cdot \Big(\underbrace{B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B \in W_2 \to \, = B}\Big) =$$

$$= \lambda A + \mu B$$

$$\Rightarrow \lambda A + \mu B \in W_2$$

b) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (a+b,\, 2a+d) \in L(1,2) \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a+b & 2a+d \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : 2a + 2b - 2a - d = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : d = 2b \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2b \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Si noti che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti poiché

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{dato che } \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è base di W_1

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{cases} a = a \\ a+b = b \\ c = c \\ c+d = d \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = 0, \ c = 0 \right\}$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Una base di W_2 è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) La somma NON è diretta.

Infatti $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$.

Si noti che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W_2}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W_2}$$

Esercizio 2

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + kx_4 = 1 \\ x_1 + (k+2)x_2 - x_3 + 2kx_4 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & k \\ 1 & k+2 & -1 & 2k \end{pmatrix}$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & k & 1 \\ 1 & k+2 & -1 & 2k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$rg(A) \geq 2. \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Vediamo gli orlati di ordine 3.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & k+2 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & k+2 & 2k \end{pmatrix} = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 2k \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

$$= -2k + k + 2(k+2-2)$$

$$= -k + 2k$$

$$= k$$

Quindi per $k \neq 0$ il $rg(A) = 3 = rg(A|B)$ e

il sistema ammette ∞ soluzioni.

Per $k = 0$, $rg(A) = 2$. Quanto al rango di $A|B$

dobbiamo controllare l'orlato con la colonna B:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A|B) = 2$$

e dunque il sistema ammette ∞^2 soluzioni.

<u>Soluzioni per $k \neq 0$</u>

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + kx_4 = 1 + t \\ x_1 + (k+2)x_2 + 2kx_4 = 1 + t \end{cases} \qquad t = x_3$$

È un sistema di Cramer, e quindi

$$x_1 = \frac{1}{k} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1+t & 2 & k \\ 1+t & k+2 & 2k \end{pmatrix} \overset{II \to II - III}{=} \frac{1}{k} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -k & -k \\ 1+t & k+2 & 2k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{k}(1+t)(-k+2k) = 1+t$$

$$x_2 = \frac{1}{k}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1+t & k \\ 1 & 1+t & 2k \end{pmatrix} = \frac{2}{k}\det\begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} = 0$$

$$x_3 = t$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}x_2 = 0$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(1+t,\ 0,\ t,\ 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

Soluzioni per $k=0$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_2 = -2t \\ x_1 + 2x_2 = s+1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_4 = t \\ x_3 = s \end{matrix}$$

da cui $x_2 = -2t$ e $x_1 = -4t + s + 1$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(1+s-4t,\ -2t,\ s,\ t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 3

$B = \{(2,1,1), (1,2,-1), (1,0,0)\}$ con $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (1,2,-1)$, $v_3 = (1,0,0)$

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1-k & 3 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1+k & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1-k & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1+k \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2 (1-\lambda)$$

Abbiamo quindi due autovalori: $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 1, e $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 2.

Troviamo gli autospazi.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(3) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1-k & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 + (1+k)x_2 \\ 3x_2 \\ x_1 + (1-k)x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + (1+k)x_2 = 0 \\ x_1 + (1-k)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1+k \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}$$

Si noti che $\det\begin{pmatrix} -2 & 1+k \\ 1 & 1-k \end{pmatrix} = -2+2k-1-k$
$= k-3.$

Quindi per $k=3$ il rango della matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1+k \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}$ è 1 e allora il sistema è equivalente a

$$x_1 = 0 \qquad \begin{matrix} x_2 = t \\ x_3 = s \end{matrix}$$

e

$$V(3) = \{ 0 \cdot v_1 + t v_2 + s v_3 : s,t \in \mathbb{R} \} = L(v_2, v_3)$$

Quindi per $k=3$ $m_g(3) = \dim V(3) = 2 = m_a(3)$

Poiché $m_a(1) = 1 = m_g(1)$, concludiamo che per $k=3$ f è diagonalizzabile.

Al fine di trovare una base di autovettori, ci manca solo trovare una base di $V(1)$.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_1 \\ 3x_2 = x_2 \\ x_1 + 3x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1 = -2t \\ x_3 = t \end{matrix}$$

Allora $V(1) = \{ -2t v_1 + 0 \cdot v_2 + t v_3 : t \in \mathbb{R} \} =$
$= L(-2v_1 + v_3)$

Quindi, per $k=1$, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f è

$$B' = \{ v_2,\ v_3,\ -2v_1 + v_3 \}$$
$$= \{ (1,2,-1),\ (1,0,0),\ (-3,-2,-2) \}$$

Quando $k \neq 3$ $\det \begin{pmatrix} -2 & 1+k \\ 1 & 1-k \end{pmatrix} \neq 0$ e quindi il sistema
$$\begin{cases} -2x_1 + (1+k)\,x_2 = 0 \\ x_1 + (1-k)\,x_2 = 0 \end{cases}$$
ammette soluzioni $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = t$, da cui

$V(3) = L(v_3) \Rightarrow m_g(3) = 1 \neq m_g(3) \Rightarrow$

f non è diagonalizzabile per $k \neq 3$