

Esercizio – Misura di resistenza e valutazione dell'incertezza

Per misurare il valore di una resistenza R , ai cui capi è applicata una tensione continua U , si possono usare due metodi distinti:

- misurare la tensione U e la corrente continua I che attraversa la resistenza e applicare la legge di Ohm;
- misurare la corrente I e la potenza P dissipata nella resistenza e ricavare la R partendo dall'espressione dell'effetto Joule che determina tale potenza.

Calcolare il valore della resistenza ottenuto con i due metodi di misura e indicare il metodo che comporta la minore incertezza nella misura stessa, sapendo che la tensione U , la corrente I e la potenza P sono misurate con strumenti digitali che forniscono i seguenti valori:

$$U=19,876 \text{ V}$$

$$I=2,334 \text{ A}$$

$$P=46,6 \text{ W}$$

e per i quali i costruttori dichiarano le specifiche di accuratezza mediante le seguenti espressioni:

- per il voltmetro: $\pm(0,3\% \text{ lettura} + 5 \text{ digit})$, con display a 4 1/2 cifre;
- per l'amperometro: $\pm(0,5\% \text{ lettura} + 2 \text{ mA})$;
- per il wattmetro: $\pm(1\% \text{ lettura} + 0,5\% \text{ fondo scala})$, con fondo scala pari a 100 W.

Si ipotizzi che la distribuzione della variabile di uscita all'interno dell'intervallo di tolleranza definito dalle specifiche degli strumenti sia di tipo uniforme e che le grandezze misurate siano tutte indipendenti tra loro.

Valor misurati

$$R_a = \frac{U}{I} = \frac{19,876}{2,334} = 8,516 \Omega$$

$$R_b = \frac{P}{I^2} = \frac{46,6}{(2,334)^2} = 8,554 \Omega$$

Specifiche degli strumenti

$$a_U = 0,003 \cdot 19,876 + 0,005 = 0,06463 \text{ V}$$

$$a_A = 0,005 \cdot 2,334 + 2 \cdot 10^{-3} = 0,014 \text{ A}$$

$$a_P = 0,01 \cdot 46,6 + \frac{0,5}{100} \cdot 100 = 0,966 \text{ W}$$

$$u(U) = \frac{a_U}{\sqrt{3}} = \frac{0,06463}{\sqrt{3}} = 0,03731 \text{ V}$$

$$u(I) = \frac{a_I}{\sqrt{3}} = \frac{0,01367}{\sqrt{3}} = 0,007894 \text{ A}$$

$$u(P) = \frac{a_P}{\sqrt{3}} = \frac{0,966}{\sqrt{3}} = 0,5577 \text{ W}$$

Propagazione delle incertezze

Incertezza tipo composta

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)^2 u_{w_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} u_{w_i, w_j}}$$

Metodo a

$$u_c(R_a) = \sqrt{\left(\frac{\partial R_a}{\partial U}\right)^2 u^2(U) + \left(\frac{\partial R_a}{\partial I}\right)^2 u^2(I)} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 u^2(U) + \left(-\frac{U}{I^2}\right)^2 u^2(I)}$$

$$u_c(R_a) = \sqrt{\left(\frac{1}{2,334}\right)^2 (0,3731)^2 + \left(-\frac{19,876}{2,334^2}\right)^2 (0,007894)^2} = 0,033 \Omega$$

Propagazione delle incertezze

Incertezza tipo composta

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)^2 u_{w_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} u_{w_i, w_j}}$$

Metodo b

$$u_c(R_b) = \sqrt{\left(\frac{\partial R_b}{\partial P}\right)^2 u^2(P) + \left(\frac{\partial R_b}{\partial I}\right)^2 u^2(I)} = \sqrt{\left(\frac{1}{I^2}\right)^2 u^2(P) + (-2PI^{-3})^2 u^2(I)}$$

$$u_c(R_b) = \sqrt{\left(\frac{1}{(2,334)^2}\right)^2 (0,5577)^2 + (2 \cdot 46,6 \cdot 2,334^{-3})^2 (0,007894)^2} = 0,118 \Omega$$