

Analisi in frequenza di segnali campionati

1 – Analisi dei segnali nel dominio della frequenza

I principali metodi di analisi dei segnali di misura possono essere riassunti nei concetti di “analisi nel dominio del tempo” e “analisi nel dominio della frequenza”. È importante osservare che questi due modi di affrontare un problema sono tra loro intercambiabili, nel senso che, sotto opportune condizioni, nessuna informazione viene persa nel passare da un dominio all’altro. Il vantaggio che deriva dall’introduzione dei due domini è la possibilità di cambiare la prospettiva con la quale si osserva un dato fenomeno. In questo modo un problema che appare di difficile soluzione in un dominio può risultare molto più semplice nell’altro.

Lo strumento matematico che consente di trasferire lo studio dei segnali e dei sistemi dal dominio del tempo al dominio della frequenza è la trasformata di Fourier.

La trasformata di Fourier $X(f)$ di una funzione continua nel tempo $x(t)$ è data dalla relazione:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Poiché in generale la $X(f)$ è complessa, essa può essere descritta mediante gli spettri di ampiezza e fase. Nel presente capitolo, per semplicità di trattazione, le figure che riportano gli andamenti degli spettri in frequenza dei segnali complessi $X(f)$ si riferiranno, implicitamente, soltanto alle loro ampiezze.

Si osservi che l’unità di misura di $X(f)$ coincide col rapporto tra l’unità di misura di $x(t)$ e quella della frequenza (espressa in hertz).

La relazione che definisce la trasformata di Fourier non è direttamente implementabile mediante un elaboratore digitale di segnale, sia perché essa richiede l’analisi di segnali continui, $x(t)$ e $X(f)$, sia perché l’integrale si estende all’infinito e richiederebbe dunque un numero infinito di dati da elaborare.

Per poter effettuare tale trasformazione con un sistema digitale sono dunque necessarie tre operazioni fondamentali: il campionamento, il troncamento del segnale e la discretizzazione dell’asse delle frequenze. Ciascuna di queste operazioni può influenzare significativamente l’attendibilità del risultato dell’analisi.

Lo scopo delle considerazioni che seguono in questo capitolo è pertanto quello di studiare gli effetti di tali operazioni per comprendere come l’analisi di Fourier possa essere implementata in modo efficace ed attendibile in un elaboratore digitale del segnale.

2 - Il teorema del campionamento

Campionamento ideale

Il campionamento (*sampling*) di un segnale analogico $x(t)$ consiste nel prenderne solo i valori $x(iT_s)$ in corrispondenza di determinati istanti (iT_s), detti istanti di campionamento.

Per esaminare le proprietà fondamentali è utile riferirsi al caso ideale in cui il campionamento è effettuato impiegando un treno di impulsi matematici.

In tale ipotesi, sia $x(t)$ un generico segnale con spettro $X(f)$ limitato in banda fino alla frequenza f_m (Fig.2.1).

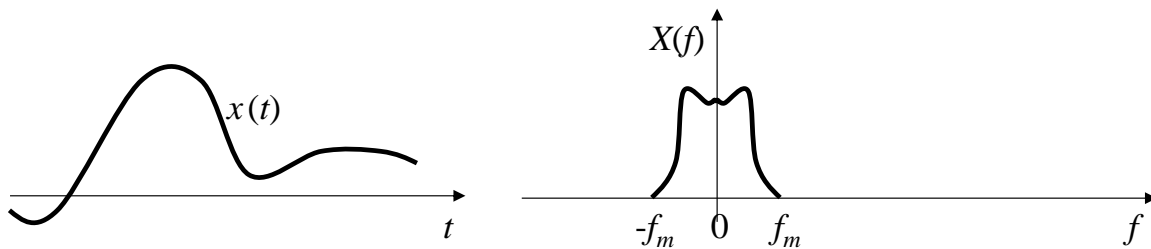


Fig.2.1 - Segnale a banda limitata: andamento nel tempo e spettro delle ampiezze.

Sia inoltre $s(t)$ il treno di impulsi matematici di area unitaria (Fig.2.2), equispaziati dell'intervallo di campionamento T_s (e quindi caratterizzati dalla frequenza $f_s=1/T_s$).

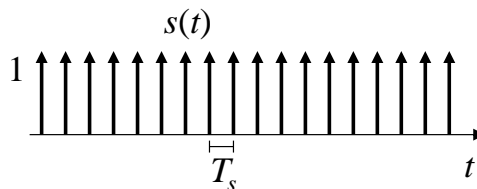


Fig.2.2 - Impulsi matematici di campionamento.

Lo spettro $S(f)$ risulta ancora un treno di impulsi, di ampiezza f_s ed equispaziati della stessa frequenza f_s (Fig.2.3).

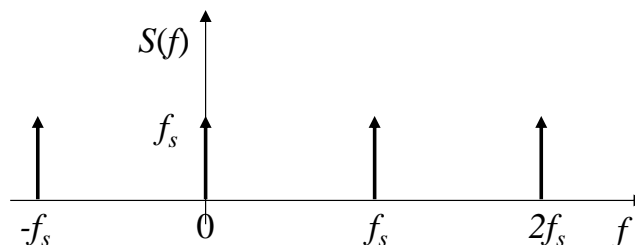


Fig.2.3 – Spettro degli impulsi matematici di campionamento.

In definitiva esiste la seguente corrispondenza fra tempo e frequenza:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_s) \Leftrightarrow S(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s) \quad (2.1)$$

Il campionamento ideale consiste nel moltiplicare il segnale $x(t)$ per il treno di impulsi $s(t)$:

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = x(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT_s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(iT_s) \cdot \delta(t - iT_s) \quad (2.2)$$

Il segnale campionato (segnale *tempo-discreto*) $x_s(t)$ è mostrato in Fig. 2.4.

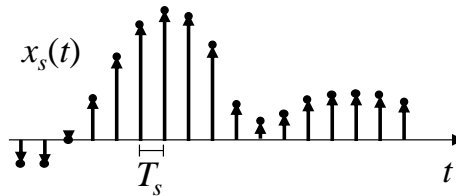


Fig.2.4 – Segnale campionato.

Per determinare lo spettro del segnale campionato è sufficiente ricordare che al prodotto algebrico nel tempo corrisponde il prodotto di convoluzione nel dominio della frequenza:

$$x(t) \cdot s(t) \Leftrightarrow X(f) * S(f) \quad (2.3)$$

Pertanto, la trasformata di Fourier del segnale campionato risulta:

$$X_s(f) = X(f) * f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s) = f_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s) \quad (2.4)$$

Quindi lo spettro del segnale campionato (Fig.2.5) è formato dalle repliche dello spettro del segnale originario $X(f)$, traslate su frequenze multiple della frequenza di campionamento f_s . Inoltre, le ordinate di tali repliche risultano tutte moltiplicate per un fattore di scala pari a f_s .

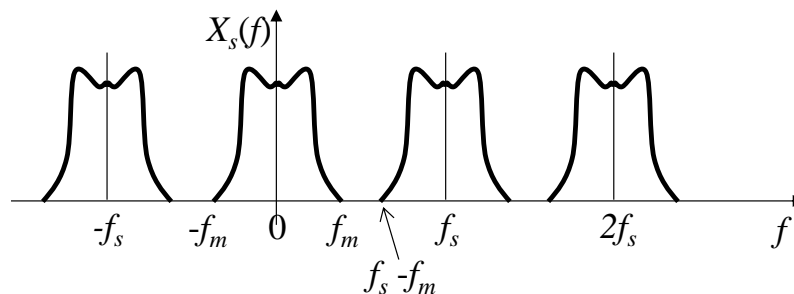


Fig.2.5 - Spettro del segnale campionato.

Affinché non esistano sovrapposizioni fra le repliche risulta evidente che il periodo di ripetizione in frequenza deve essere maggiore o al più uguale a $2f_m$:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2f_m \quad (2.5)$$

La condizione (2.5) riassume il ben noto *teorema del campionamento*.

Se la frequenza di campionamento f_s è maggiore del doppio della massima frequenza f_m contenuta nel segnale è possibile, come si comprende agevolmente dalla Fig.2.5, isolare lo spettro del segnale $X(f)$ in banda base e quindi ricostruire il segnale originario $x(t)$.

Se viceversa $f_s < 2f_m$, ossia se la velocità con cui si effettua il campionamento è insufficiente e quindi i campioni acquisiti sono troppo radi, non è possibile riottenere il segnale originario in alcun modo, a causa della sovrapposizione delle repliche che crea un disturbo da spettro adiacente. Tale fenomeno è detto *aliasing* (Fig.2.6).

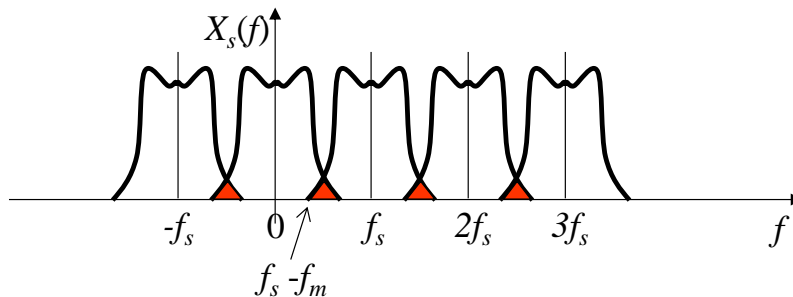


Fig.2.6 – Fenomeno di aliasing.

Da quanto appena detto si evince che condizione necessaria affinché si possa eseguire correttamente la trasformata di Fourier sul segnale campionato $x_s(t) = x(iT_s)$ è che il segnale originario $x(t)$ sia a spettro limitato.

3 - Troncamento del segnale

Dispersione spettrale (*leakage*)

Si è già visto che l'analisi di Fourier si applica formalmente a segnali di durata infinitamente estesa e pertanto anche la sequenza dei campioni che rappresenta il segnale in forma discreta dovrà essere teoricamente di lunghezza infinita.

Tale ipotesi non è ovviamente realizzabile nella pratica. In generale, con riferimento a un processo di campionamento reale, la sequenza dei campioni avrà necessariamente un inizio e una fine e pertanto il numero dei campioni a disposizione sarà un numero finito.

Per esaminare il problema è utile considerare il segnale di durata limitata come una porzione del segnale generico $x(t)$, prelevata attraverso un'opportuna finestra temporale $w(t)$ (*window*), detta anche finestra di troncamento o di osservazione.

L'effetto del troncamento sul segnale si può rappresentare nel seguente modo:

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t) \quad (3.1)$$

La trasformata di Fourier del segnale troncato risulta dalla convoluzione degli spettri:

$$X_w(f) = X(f) * W(f) \quad (3.2)$$

La convoluzione della trasformata $X(f)$ del segnale con la trasformata $W(f)$ della finestra di

troncamento introduce un nuovo tipo di distorsione, detta dispersione spettrale (*spectral leakage*).

In pratica, se lo spettro del segnale originario $X(f)$ contiene delle transizioni nette, ad esempio componenti armoniche impulsive come nel caso di un segnale periodico nel tempo, tali transizioni vengono smussate e lo spettro del segnale periodico troncato si disperde in frequenza, tanto più quanto più è stretta la finestra di troncamento.

La finestra di troncamento più semplice è quella di tipo rettangolare, rappresentata in fig. 3.1 e definita dalla seguente relazione:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T_w}{2} \leq t \leq \frac{T_w}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.3)$$

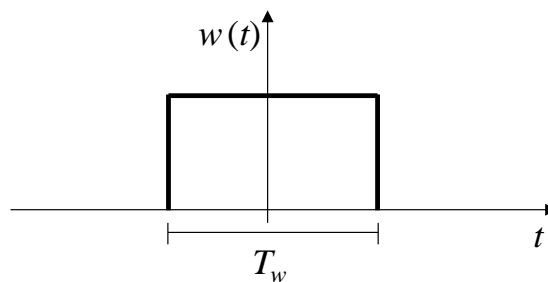


Fig.3.1 - Finestra rettangolare.

Lo spettro $W(f)$ del segnale di troncamento è del tipo $\sin(x)/x$, come rappresentato in Fig.3.2.

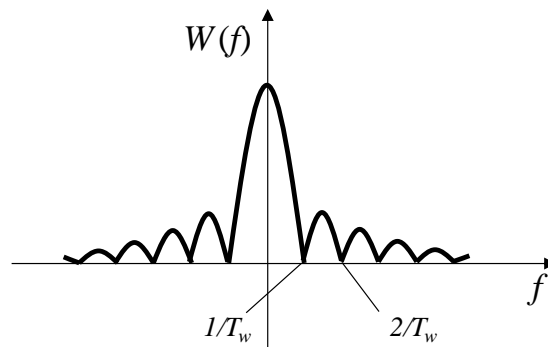


Fig.3.2 – Spettro del segnale di troncamento rettangolare.

Si consideri, per fissare le idee, un segnale sinusoidale $x(t)$ di frequenza f_0 , che quindi presenta uno spettro costituito da due impulsi a frequenza $\pm f_0$, troncato con una finestra rettangolare $w(t)$ di durata T_w (Fig. 3.3).

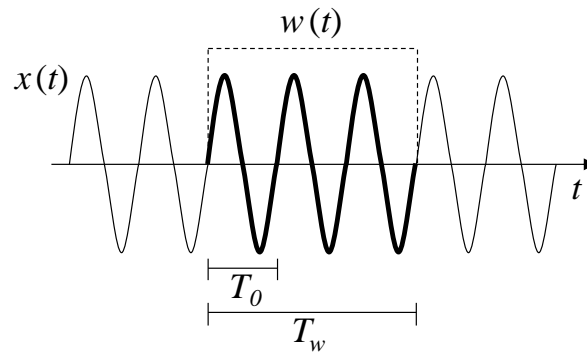


Fig.3.3 - Segnale sinusoidale troncato con finestra rettangolare.

La convoluzione degli impulsi in frequenza con la funzione $W(f)$ produce gli effetti illustrati in Fig. 3.4.

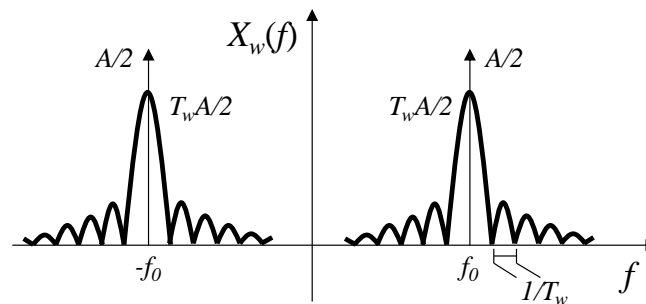


Fig.3.4 – Spettro del segnale sinusoidale troncato con finestra rettangolare.

L'entità della dispersione in frequenza dipende dalla durata T_w della finestra di osservazione e dal suo andamento temporale. In particolare, l'andamento nel tempo della finestra di troncamento determina l'ampiezza dei lobi laterali della dispersione e risulta quindi direttamente responsabile della accuratezza con cui viene stimato lo spettro del segnale troncato. Sotto questo aspetto, concreti vantaggi possono essere ottenuti ampliando, entro limiti accettabili dal punto di vista pratico, la durata T_w o utilizzando finestre temporali non rettangolari, ma con transizione più graduale delle estremità (*smoothing windows*), delle quali si parlerà più avanti.

Segnale campionato e troncato

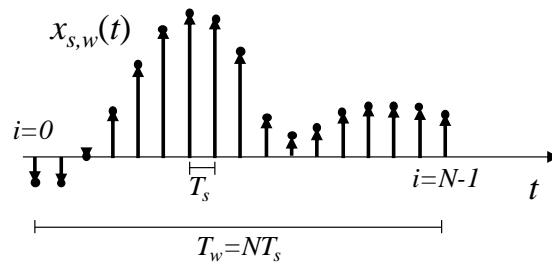
Si consideri ora il campionamento di un segnale troncato, osservato attraverso la finestra rettangolare $w(t)$ di durata $T_w = NT_s$, essendo N il numero di impulsi considerati e T_s l'intervallo di campionamento.

In tale ipotesi il segnale campionato e troncato è individuato dai campioni:

$$x(iT_s) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (3.3)$$

e può essere analiticamente rappresentato nella forma (vedi Fig.3.5):

$$x_{s,w}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) \delta(t - iT_s) \quad (3.4)$$


Fig.3.5 - Segnale campionato e troncato.

La trasformata di Fourier della sequenza di campioni risulta, applicando la proprietà di traslazione nel tempo:

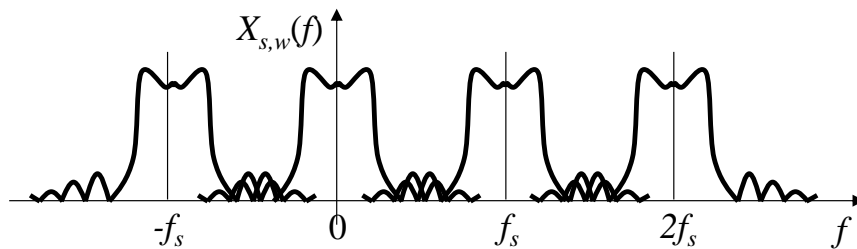
$$X_{s,w}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) e^{-j2\pi f iT_s} \quad (3.5)$$

Questa espressione costituisce un altro modo di rappresentare lo spettro a repliche di un segnale campionato. Tale spettro può essere inteso come una serie di funzioni esponenziali, nel dominio della frequenza, pesate con le ampiezze dei vari campioni.

Si osserva (Fig.3.6) che lo spettro del segnale campionato e troncato risulta ancora una funzione continua nella frequenza, formata da repliche dello spettro in banda base.

Tuttavia, a causa del troncamento del segnale nel tempo, sarà in generale presente nello spettro in banda base una distorsione più o meno pronunciata di *leakage*.

In conseguenza di questo fatto, nel replicare lo spettro, a seguito del campionamento, nascerà anche il fenomeno dell'*aliasing*. Si vedano a questo proposito in Fig.3.6 le code delle repliche in $X_{s,w}(f)$.


Fig.3.6 – Spettro del segnale campionato e troncato.

4 - Trasformata discreta di Fourier (DFT)

La trasformata di Fourier non può essere valutata per tutti i valori possibili della variabile continua f , perché questo significherebbe eseguire un numero infinito di volte i calcoli necessari per la sua implementazione. D'altra parte, dal punto di vista della conoscenza dell'informazione sullo spettro di un segnale campionato e troncato (quindi caratterizzato da N numeri), sarebbe strettamente sufficiente conoscere l'andamento dello spettro solo nell'intervallo di ripetizione in frequenza ($0 \div f_s$).

La trasformata discreta di Fourier (*Discrete Fourier Transform, DFT*) consente di valutare il contenuto armonico in tale intervallo mediante un numero N di componenti discrete.

Il passaggio a una rappresentazione discreta dello spettro risulta concettualmente semplice, osservando che la sequenza finita di N campioni nel tempo può essere considerata appartenente a una successione di sequenze di periodo $T_w = NT_s$ che si ripetono indefinitamente dando luogo a un segnale periodico con frequenza $f_w = 1/T_w$.

Lo spettro della sequenza di campioni replicata nel tempo con periodo T_w risulta allora uno spettro a righe, spaziate di $f_w = 1/T_w$. Il valore f_w costituisce quindi la *risoluzione in frequenza* della DFT.

La ripetizione dello spettro in frequenza dipende dal campionamento nel tempo, così come il campionamento in frequenza è dovuto alla periodicità del segnale nel tempo.

Il legame di trasformazione fra i campioni nel tempo $x_i = x(iT_s)$ e i campioni in frequenza $X_k = X(kf_w)$ è dato dalla trasformata discreta diretta e inversa di Fourier.

Poiché le trasformate discrete di Fourier (diretta e inversa) coinvolgono solo campioni (sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza) vengono definite in forma normalizzata rispetto a variabili indipendenti di tipo adimensionale: pertanto la variabile tempo diventa l'indice i , mentre la variabile frequenza diventa l'indice k .

La definizione delle componenti armoniche a frequenze multiple di f_w , cioè multiple di f_s/N , è la seguente:

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) e^{-j2\pi k f_w i T_s} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j\frac{2\pi}{N} k i} \quad \left(\text{con } f_w = \frac{1}{T_w} = \frac{f_s}{N} \right) \quad (4.1)$$

Si osservi che, a differenza di quanto avviene per la trasformata continua, in questo caso il segnale tempo-discreto x_i e ciascun coefficiente X_k vengono espressi mediante le stesse unità di misura. Ciò è dovuto al fatto che, mentre la $X(f)$ rappresenta una densità spettrale, i coefficienti X_k rappresentano direttamente i valori delle singole componenti spettrali.

In pratica, di tutte le possibili armoniche di ordine k , per un segnale $x(t)$ reale solo le prime $N/2$ sono significative e portano informazione, in quanto le successive $N/2$ risultano speculari rispetto alla frequenza di *folding* $f_s/2$ e coniugate (Fig. 4.1).

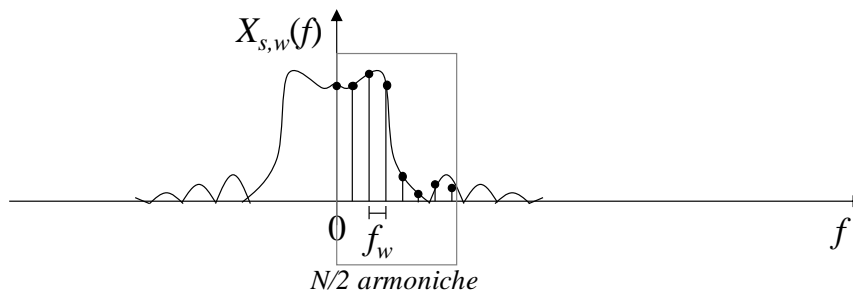


Fig.4.1 – *Trasformata discreta di Fourier per un segnale reale.*

Si osservi infine che taluni Autori adottano altre definizioni per la trasformazione diretta e inversa, per esempio scambiando il fattore $1/N$ fra le due definizioni. Ciò non cambia il senso della trasformazione.

DFT di segnali periodici

I segnali periodici sono di particolare interesse pratico.

In tali casi l'analisi armonica mediante *DFT* richiede una certa cautela, soprattutto in relazione alla scelta della finestra di troncamento e al fatto che la frequenza di

campionamento sia o meno sincronizzata con la frequenza fondamentale del segnale da analizzare.

Per comprendere tali aspetti si consideri, come esempio, un segnale sinusoidale di frequenza f_0 e si supponga che questo venga campionato alla frequenza f_s , sufficiente a garantire il rispetto del teorema del campionamento.

Si possono sottolineare le seguenti relazioni generali:

- la finestra di osservazione T_w contiene un numero m di periodi T_0 del segnale da analizzare: $T_w = mT_0$ (dove m può essere intero o frazionario);
- detto N il numero totale di campioni che cadono in tale finestra, la frequenza di campionamento risulta $f_s = Nf_w = Nf_0/m$.

Per il caso particolare rappresentato nella Fig.4.2 si verifica facilmente che:

- $m=6$ è intero ($T_w = 6T_0$);
- $N=24$ e pertanto $f_s = 24f_w = 4f_0$.

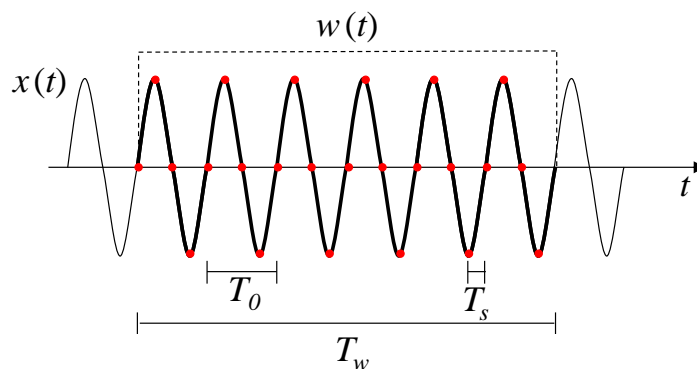


Fig.4.2 - Sinusoide campionata e troncata: campionamento coerente.

In questo caso ripetere la finestra di osservazione T_w indefinitamente nel tempo significa riprodurre in forma esatta la funzione periodica originaria. E infatti il calcolo della DFT per le diverse componenti kf_w fornisce una rappresentazione corretta dello spettro, con componenti tutte nulle tranne proprio l'unica componente armonica effettivamente presente alla frequenza $f_0 = 6f_w$, come rappresentato in Fig.4.3. A tale condizione ottimale ci si riferisce spesso con l'espressione *campionamento coerente*.

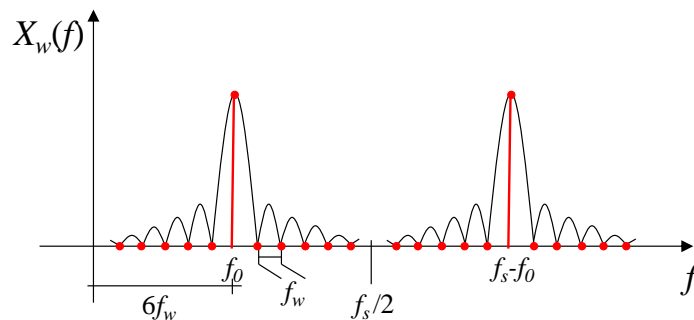


Fig.4.3 - Spettro di una sinusoide campionata e troncata: campionamento coerente.

Si consideri ora un secondo esempio, rappresentato in Fig.4.4:

- $m=6,5$ non è intero ($T_w = 6,5T_0$);
- $N=26$ e pertanto $f_s = 26f_w = 4f_0$.

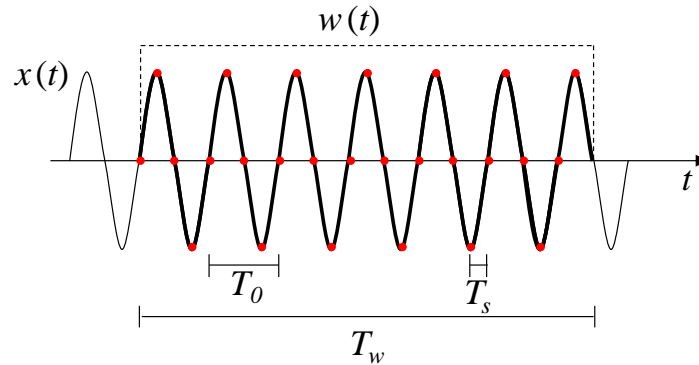


Fig.4.4 - Sinusoide campionata e troncata: campionamento non coerente.

In questo caso la ripetizione nel tempo del segnale campionato e troncato non riprodurrà esattamente la funzione periodica originaria, con una conseguente distorsione nello spettro. Questo fatto trova riscontro nella *DFT*, che evidenzierà, in tal caso, componenti in frequenza non presenti nello spettro del segnale periodico originario, come si vede in Fig.4.5.

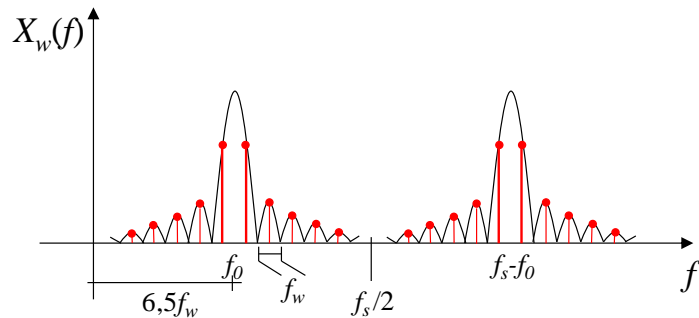


Fig.4.5 - Spettro di una sinusoide campionata e troncata: campionamento non coerente.

Dall'esame dei semplici casi riportati si conclude che, per una corretta analisi armonica di segnali periodici mediante *DFT*, rivestono particolare importanza la scelta della finestra di troncamento e il fatto che la frequenza di campionamento sia sincronizzata con la frequenza fondamentale del segnale da analizzare.

Finestre di osservazione

Come detto, la *DFT* consente il calcolo dello spettro in frequenza di un segnale a partire da un blocco di campioni dell'ingresso, chiamato finestra di osservazione (o *time record*). Questo calcolo è basato sull'ipotesi che il *record* di dati si ripeta indefinitamente nel tempo.

Si è visto come tale considerazione diventi un aspetto critico se il segnale da analizzare è periodico. Se la finestra di osservazione contiene un numero intero di periodi (campionamento coerente), allora l'ipotesi di partenza è verificata e l'analisi nel dominio della frequenza risulta corretta. Se invece la finestra di osservazione contiene un numero di

campioni che non costituisce un numero intero di periodi, allora la sua ripetizione nel tempo non coincide con il segnale effettivo e quindi la DFT fornisce risultati non corretti.

Quando non sia attuabile la soluzione del campionamento coerente può essere utile impiegare le funzioni di “finestratura” (*windowing*). Per comprendere qualitativamente il ruolo di queste finestre, dette anche di *smoothing*, si deve osservare che i problemi dovuti a un campionamento non coerente si manifestano principalmente agli estremi dell’intervallo di osservazione, dove si osservano effetti di discontinuità, mentre nella parte centrale il *record* di dati riproduce fedelmente quello del segnale originario.

Pertanto, è ragionevole ipotizzare che se si potessero trascurare gli estremi e si potesse concentrare l’analisi sulla parte centrale del *record* si otterrebbe uno spettro in frequenza più corretto. Questa condizione si ottiene appunto con delle finestre particolari, che pesano diversamente i vari campioni, assumendo valore basso (o nullo) agli estremi e più elevato nelle porzioni centrali dell’intervallo di osservazione.

Dal punto di vista matematico queste funzioni, che rispetto alla finestra rettangolare attenuano le discontinuità agli estremi, hanno uno spettro in frequenza più limitato, che consente quindi di ridurre i problemi prima menzionati.

Esistono diverse finestre, ciascuna delle quali si dimostra più adatta di altre in determinate situazioni. È quindi opportuno conoscere a priori il tipo di segnale da analizzare, perché una erronea scelta della finestra può aggravare la situazione piuttosto che migliorarla.

La finestra più semplice e usata è quella di Hanning, che ha un andamento di tipo cosinusoidale (massimo al centro e nullo agli estremi) e la cui trasformata di Fourier (Fig.4.6) ha un lobo unico, ma di larghezza doppia rispetto a quello della finestra rettangolare. Pertanto, la risoluzione in frequenza peggiora, ma viene ridotto il contributo delle frequenze spurie.

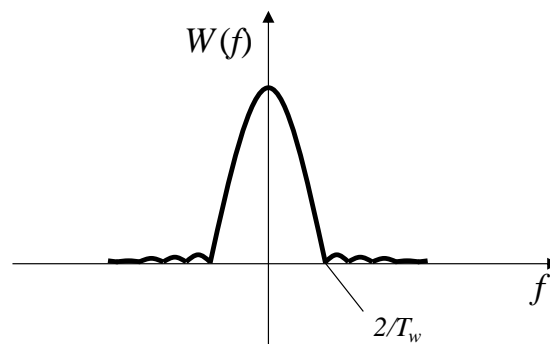


Fig.4.6 - Spettro della finestra di Hanning.

Un inconveniente della finestra di Hanning può derivare dal fatto che i suoi lobi sono arrotondati e non piatti nella parte centrale. Questo significa che, se la componente da analizzare non è perfettamente centrata rispetto al lobo, la sua ampiezza non viene misurata accuratamente. Per limitare questo problema sono state studiate finestre alternative, caratterizzate da un andamento piatto nella banda passante dello spettro in frequenza e per questo motivo dette *flat top* (Fig.4.7). Questo provvedimento consente di migliorare l’accuratezza nella misura dell’ampiezza, ma viene pagato con un ulteriore peggioramento della risoluzione in frequenza.

Altre finestre utilizzate sono quelle di Hamming, di Blackman-Harris, ecc..

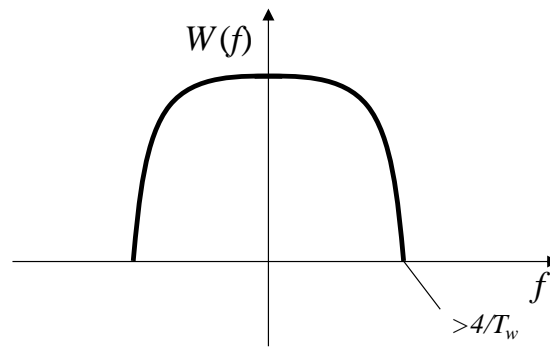


Fig.4.7 - Spettro della finestra flat top.

Algoritmi FFT (Fast Fourier Transform).

La DFT è uno strumento molto utile per determinare lo spettro in frequenza di un segnale, ma l'onere computazionale richiesto per implementare questa tecnica può essere elevato. Infatti entrambi gli indici, i e k , devono variare tra 0 e N per produrre tutti i risultati desiderati e pertanto sono necessarie N^2 operazioni di moltiplicazione e addizione. Per esempio per $N=1000$ sono necessarie 10^6 operazioni.

Per questo motivo sono stati sviluppati diversi algoritmi di trasformata rapida di Fourier (*Fast Fourier Transform, FFT*) che, sfruttando le proprietà di simmetria della DFT, ne consentono una valutazione più rapida. Tra questi il più diffuso è il *radix-2 FFT*, che consente di ridurre le operazioni ad un numero pari a $N \log_2 N$. Per esempio per eseguire una DFT a 512 punti questo algoritmo necessita di 4608 operazioni invece che 262144. L'unico vincolo per la sua applicazione è che il numero di campioni considerato sia pari ad una potenza intera di 2.