

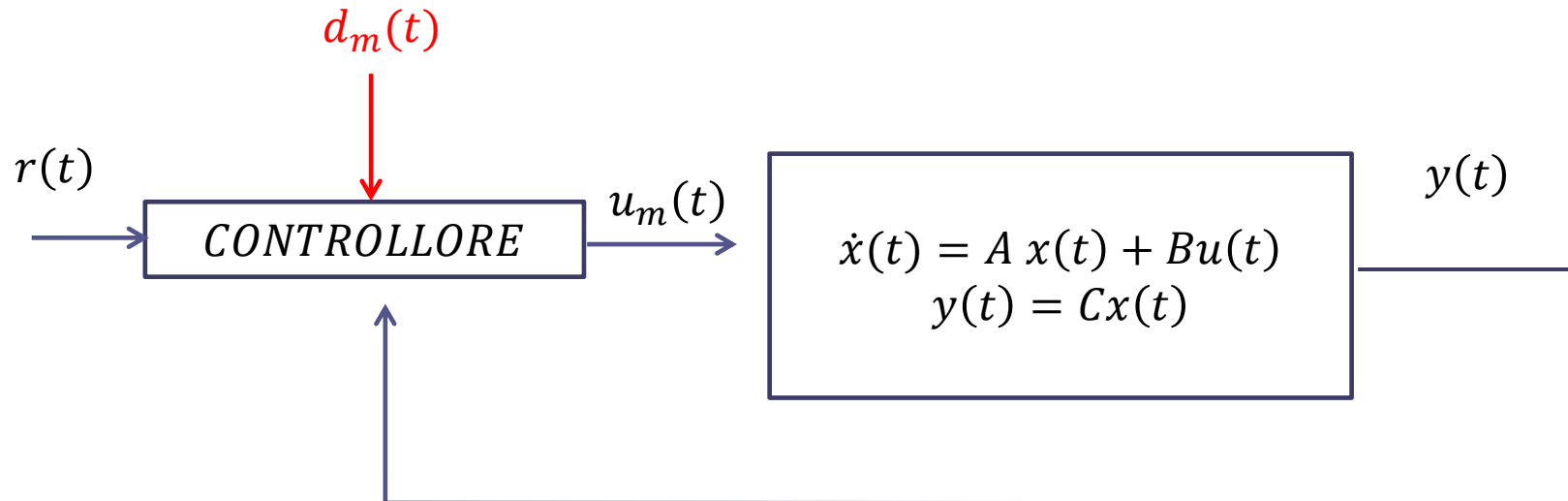
# Controllo dei sistemi energetici

## Osservatori di stato ed osservatori dei disturbi

**Prof. Alessandro Pisano**  
apisano@unica.it

Gli schemi di controllo «classici» sono basati sulla retroazione dell'uscita ed, eventualmente, sulla compensazione dei disturbi misurabili (fanno eccezione i sistemi di controllo in cascata, in cui si retroazionano anche una o più variabili intermedie).

**Controllo in retroazione sull'uscita (con modello dell'impianto a tempo continuo)**



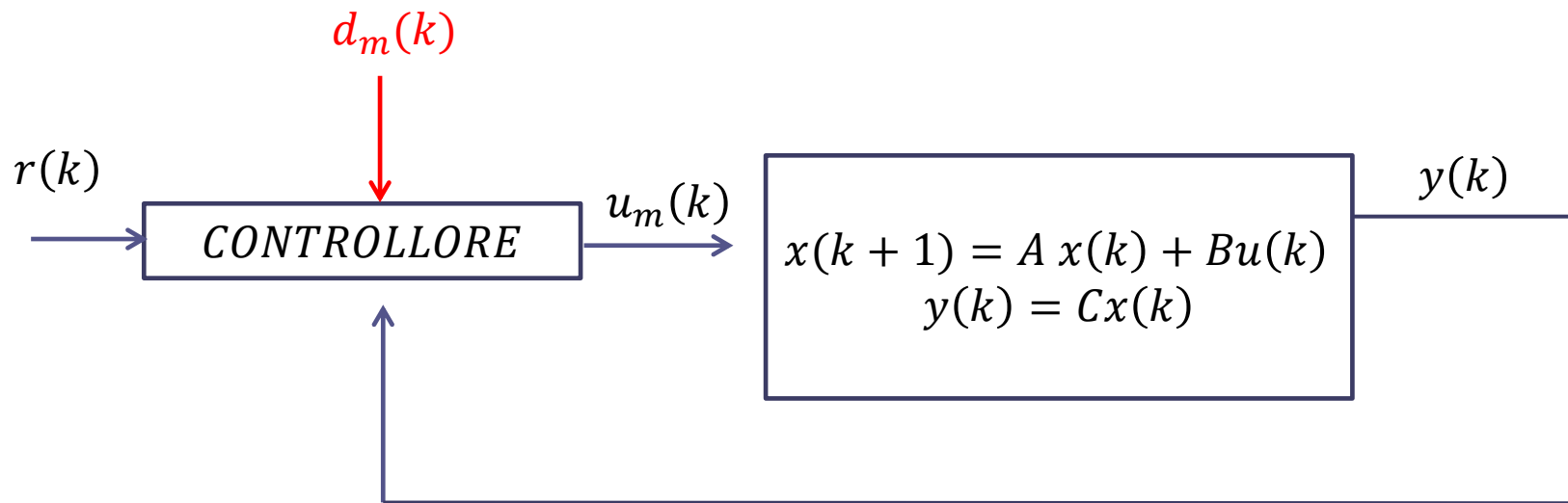
$$u(t) = \begin{bmatrix} u_m(t) \\ d_m(t) \\ d_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$u_m(t)$ : ingressi **manipolabili**

$d_m(t)$ : ingressi disturbanti misurabili

$d_{nm}(t)$ : ingressi disturbanti **non** misurabili

## Controllo in retroazione sull'uscita (con modello dell'impianto a tempo **discreto**)



$$u(k) = \begin{bmatrix} u_m(k) \\ d_m(k) \\ d_{nm}(k) \end{bmatrix}$$

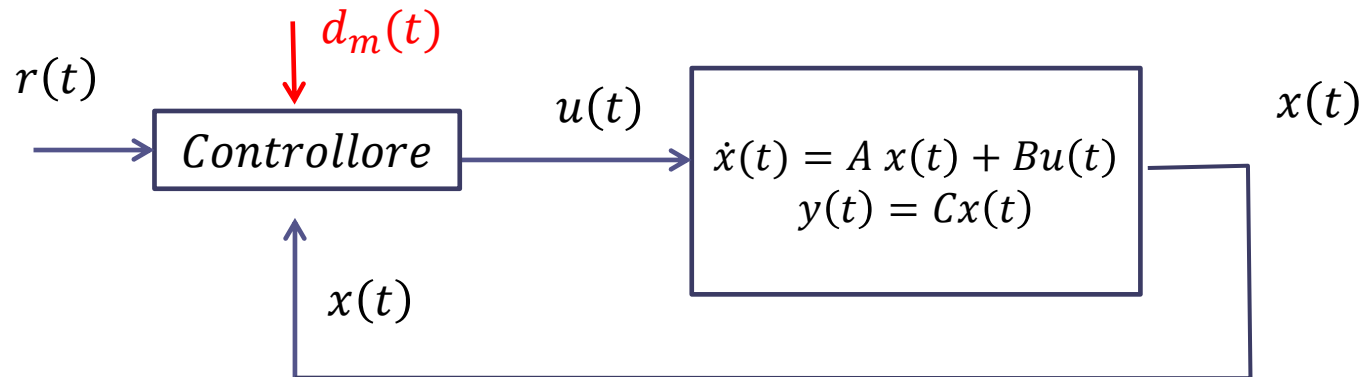
$u_m(k)$ : ingressi **manipolabili**

$d_m(k)$ : ingressi disturbanti misurabili

$d_{nm}(k)$ : ingressi disturbanti **non** misurabili

E' facile immaginare che se il controllore ha accesso ad una quantità di informazioni superiore, ad esempio la **misura completa di tutte le variabili di stato**, è possibile realizzare il controllo dell'impianto con migliori proprietà

### Controllo in retroazione sullo **stato**

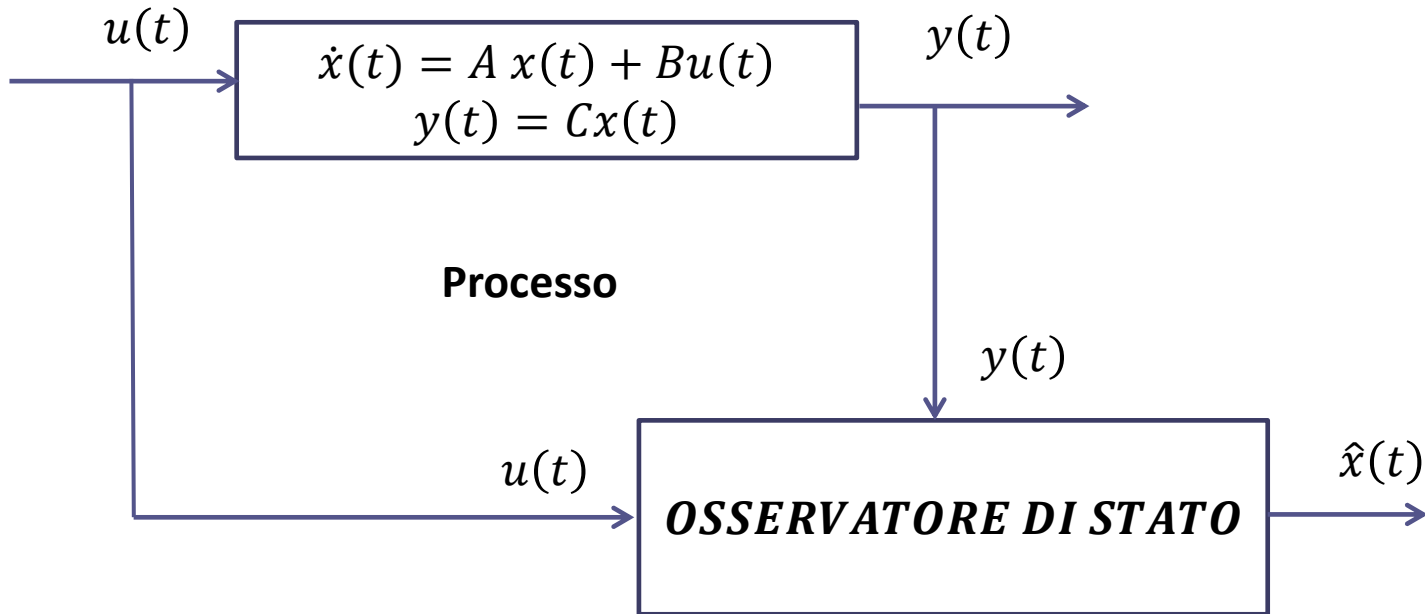


Il principale problema è che devono essere accessibili per misura tutte le variabili di stato del sistema.

Poiché sono tipicamente accessibili per misura solo le variabili di uscita, si rende necessario sviluppare un metodo per **stimare l'andamento delle variabili di stato**.

La risposta che la teoria dei controlli offre a questo problema è un **algoritmo** denominato **osservatore di stato** in grado (**sotto opportune condizioni**) di stimare l'evoluzione temporale delle variabili di stato richiedendo unicamente la misura della variabile di uscita.

## Architettura di riferimento di un osservatore di stato a tempo continuo

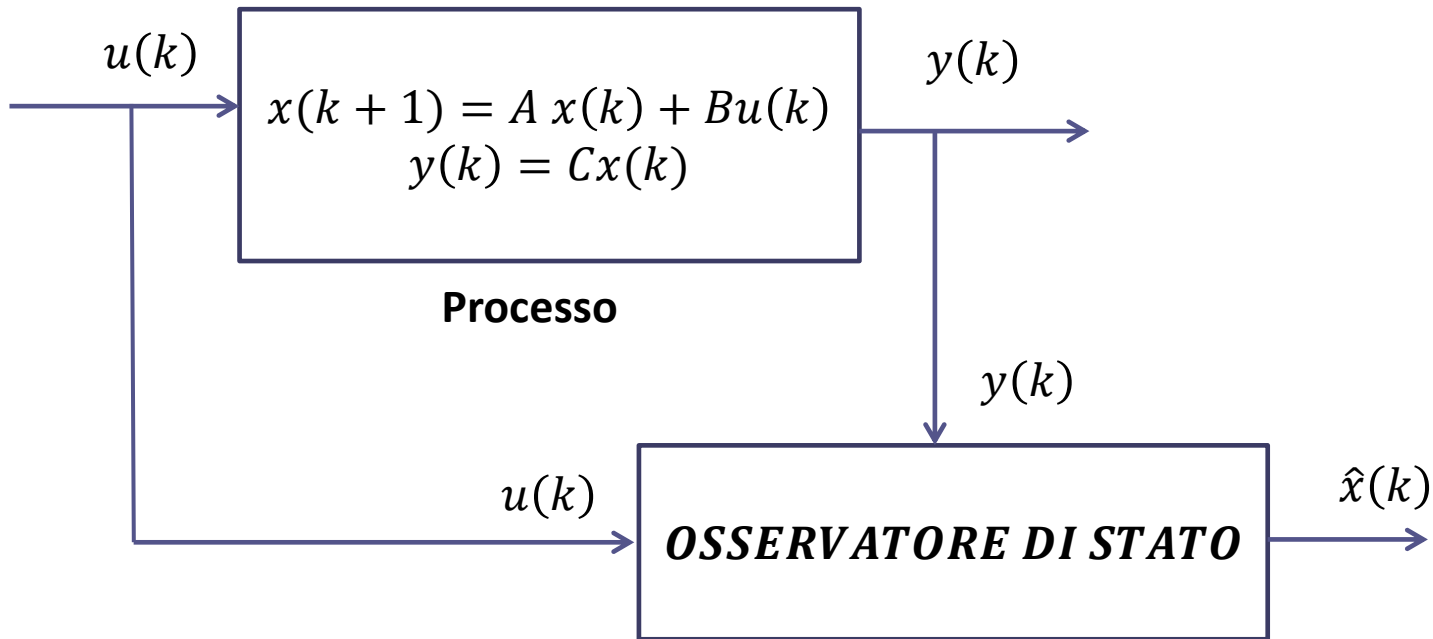


Progetteremo l'osservatore di stato in modo da garantire la seguente condizione

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad t \rightarrow \infty$$

Chiaramente, tale processo di convergenza dovrà avvenire in maniera «**sufficientemente rapida**» in caso contrario la stima ottenuta risulta inutile ai fini del controllo.

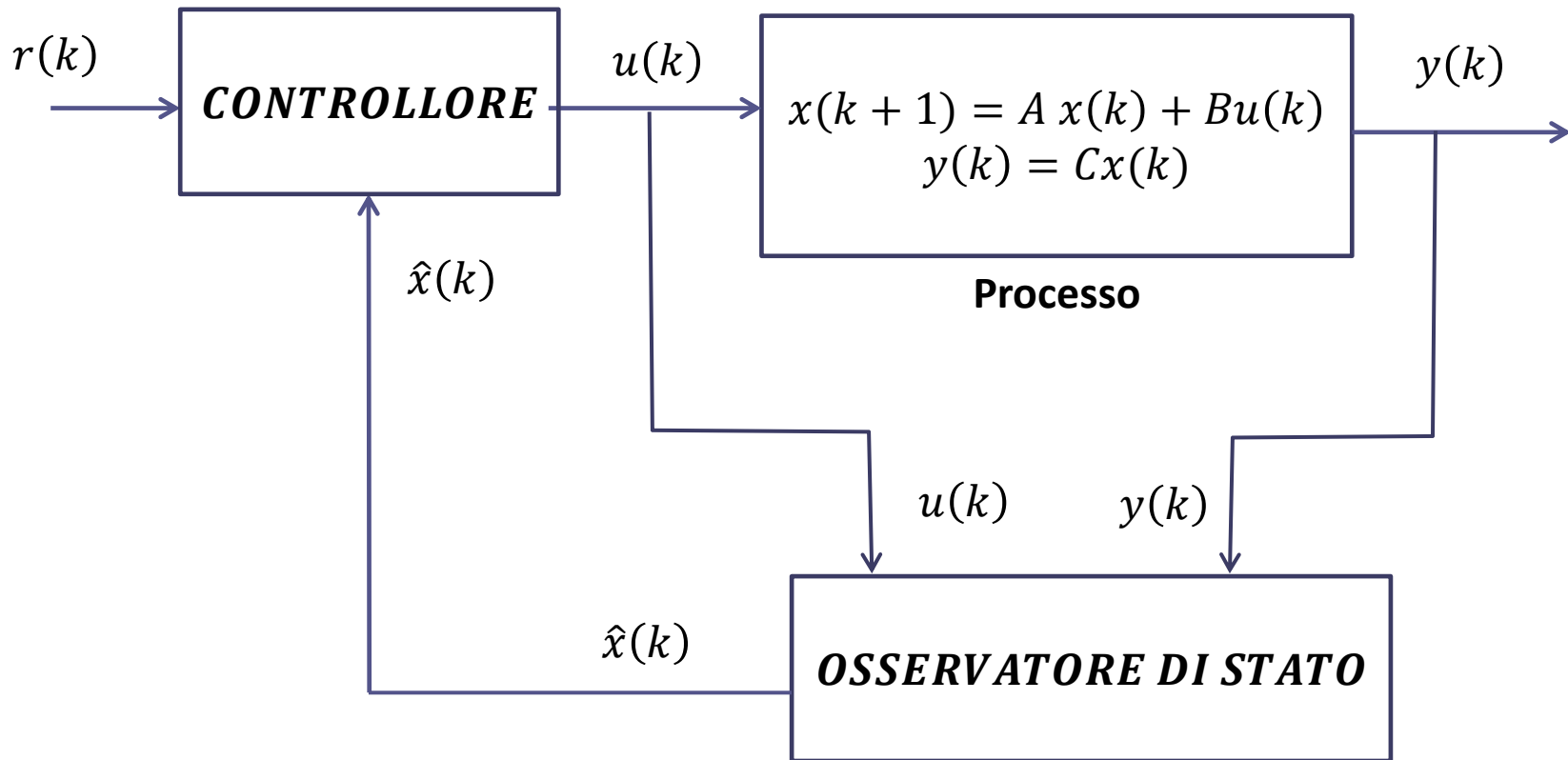
## Architettura di riferimento di un osservatore di stato a tempo discreto



Progetteremo l'osservatore di stato in modo da garantire la seguente condizione

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad k \rightarrow \infty$$

Architettura di riferimento di un sistema di controllo in **retroazione sullo stato osservato** (observer-based state-feedback control)



## Progetto a tempo continuo – osservatore di Luenberger

Processo di cui si desidera ricostruire lo stato:  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$   
 $y(t) = Cx(t)$

L'osservatore di Luenberger a tempo continuo ha la seguente espressione

$$\hat{\dot{x}}(t) = \underbrace{A\hat{x}(t) + Bu(t)}_{\text{Modello del processo}} + \underbrace{L(y(t) - C\hat{x}(t))}_{\text{«Output injection»}}$$

$\hat{x}(t) =$  stima dello stato

Serve a garantire, attraverso una opportuna **scelta della matrice costante**  $L \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ , che l'**errore di osservazione**  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  tenda a zero con sufficiente rapidità

Analizziamo quindi l'evoluzione dell'errore di osservazione, e valutiamo in particolare come sia possibile influenzarlo attraverso la scelta opportuna della matrice  $L$

Analizziamo la **dinamica dell'errore di osservazione**  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = A x(t) + \cancel{B u(t)} - A \hat{x}(t) - \cancel{B u(t)} - L(y(t) - C \hat{x}(t)) \\ &= A x(t) - A \hat{x}(t) - L(C x(t) - C \hat{x}(t)) = A e(t) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= [A - L C] e(t) \end{aligned}$$

$$\dot{e}(t) = [A - L C] e(t)$$

La dinamica dell'errore di osservazione è governata da un sistema lineare autonomo, la cui matrice di stato  $A - L C$  dipende dalla matrice  $L$  dei guadagni dell'osservatore

Per garantire che le componenti dell'errore di osservazione tendano a zero, è sufficiente che si scelga  $L$  in modo da collocare in maniera opportuna gli autovalori della matrice  $A - L C$

Dovranno sicuramente giacere nel semipiano sinistro, ed in particolare la loro parte reale ne governerà la rapidità di decadimento.

Ci chiediamo, preliminarmente **sotto quali condizioni sulle matrici  $A$  e  $C$  sia possibile determinare un vettore  $L$  tale che gli autovalori della matrice  $A - L C$  siano posizionabili a piacere.**

### Teorema

Gli autovalori della matrice  $[A - L C]$  possono essere assegnati arbitrariamente mediante una opportuna scelta della matrice  $L$  se e solo se la «**matrice di osservabilità**»

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ha rango pieno.

Se è soddisfatta la condizione  $\text{rank } M_o = n$  diremo che il sistema (o più precisamente la «coppia  $(A,C)$ ») è osservabile.

$C$  definisce la scelta dei sensori di misura da impiegare, cioè delle variabili di stato che nel sistema originario dovranno essere misurate.

## Funzione Matlab per il calcolo della matrice $L$

Scegliamo arbitrariamente la posizione desiderata per gli autovalori della matrice  $A - LC$

Autovdes

Vettore che contiene gli autovalori desiderati

Funzione `place` per la determinazione di  $L$

```
L = place(A',C', Autovdes)'
```



La possibilità di poter collocare arbitrariamente gli autovalori della matrice  $A - LC$  deve tenere in considerazione il fatto che nel momento in cui si impone all'osservatore una dinamica di convergenza estremamente rapida (imponendo autovalori con una parte reale molto negativa) si amplifica nel contempo la propagazione dei rumori di misura.

Nell'assegnamento degli autovalori della matrice  $A - LC$  si deve pertanto prestare attenzione a non collocarli eccessivamente a sinistra nel semipiano sinistro.

Toccheremo con mano questo problema in un successivo esempio.

Dinamica dell'errore di osservazione per un osservatore di Luenberger a tempo continuo:

$$\dot{e}(t) = [A - L C] e(t)$$

N.B. Se il processo di cui si desidera stimare lo stato è **asintoticamente stabile**, anche la scelta  $L = 0$  risulta ammissibile in quanto  $\dot{e}(t) = A e(t)$  è comunque tale da garantire che  $e(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$

Si parla in tal caso di **osservatore identità**:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)$$

$\hat{x}(0) = \hat{x}_0$       Condizioni iniziali arbitrarie (in generale differenti da quelle del sistema originario)

La pecca principale dell'osservatore identità è che non vi è modo per influenzarne la rapidità di convergenza, che risulta determinata dalla dinamica del processo di cui si desidera stimare lo stato.

## Progetto a tempo discreto

Processo di cui si desidera ricostruire lo stato:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

L'osservatore di stato ha la seguente espressione

$$\hat{x}(k+1) = \underbrace{A\hat{x}(k) + Bu(k)}_{\text{Modello del processo}} + \underbrace{L_0(y(k) - C\hat{x}(k))}_{\text{«Output injection»}}$$

Serve a garantire, attraverso una opportuna scelta della matrice  $L_0$ , che l'errore di osservazione  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  tenda asintoticamente a zero con sufficiente rapidità

## Progetto a tempo discreto

Processo di cui si desidera ricostruire lo stato:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A x(k) + B u(k) \\ y(k) &= C x(k)\end{aligned}$$

Osservatore:

$$\hat{x}(k+1) = A \hat{x}(k) + B u(k) + L_0 (y(k) - C \hat{x}(k))$$

Analizziamo la dinamica dell'errore di osservazione  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ :

$$\begin{aligned}e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) = A x(k) + \cancel{B u(k)} - A \hat{x}(k) - \cancel{B u(k)} - L_0 (y(k) - C \hat{x}(k)) \\ &= A x(k) - A \hat{x}(k) - L_0 (C x(k) - C \hat{x}(k)) = A e(k) - L_0 C (x(k) - \hat{x}(k)) \\ &= [A - L_0 C] e(k)\end{aligned}$$

Sistema autonomo a tempo discreto. Asintoticamente stabile se gli autovalori della matrice di stato  $A - L_0 C$  giacciono internamente al disco di raggio unitario.

$$e(k + 1) = [A - L_0C] e(k)$$

Gli autovalori della matrice  $[A - L_0C]$  dovranno essere collocati **all'interno del disco unitario**, ed in aggiunta **sufficientemente prossimi all'origine** in modo da garantire una sufficiente rapidità di convergenza della stima (con un occhio anche al contenimento della amplificazione dei rumori di misura, come detto in precedenza)

La verifica di osservabilità è del tutto analoga a quella del caso a tempo continuo

## Determinazione della matrice $L_0$ mediante Matlab

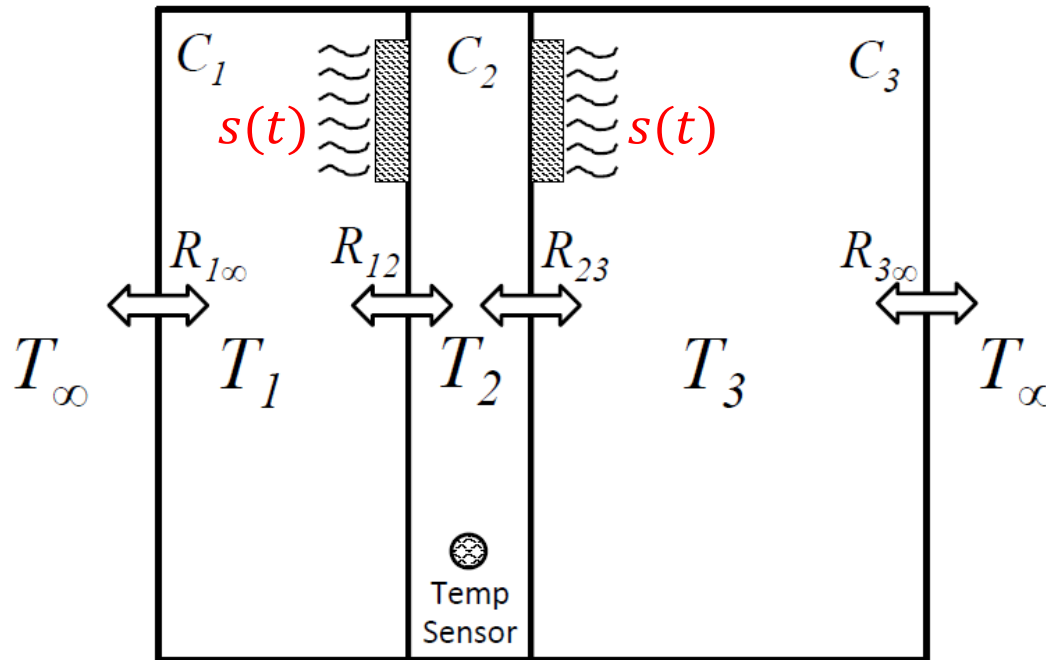
Autovdes

Vettore che contiene gli autovalori desiderati della matrice  $[A - L_0C]$

Funzione **place** per la determinazione di  $L_0$

$$L_0 = \text{place}(A', C', \text{Autovdes})'$$

## Esempio Stima della temperatura in un appartamento



3 stanze (due stanze più grandi ai lati ed un corridoio centrale più stretto)

Unità di riscaldamento presente negli ambienti 1 e 3

La temperatura è misurata unicamente nel corridoio centrale

$C_i = \rho c V_i$       **Capacità termica** dell'i-esimo ambiente ( $V_i$ =volume)

$R_{12}, R_{23}$       Resistenze termiche fra gli ambienti

$R_{1\infty}, R_{3\infty}$       Resistenze termiche con l'ambiente esterno (trascuriamo lo scambio termico fra il corridoio e l'esterno)

Applicando il P.C.E. ai tre ambienti dell'appartamento si ottiene

$$C_1 \dot{T}_1 = \frac{T_\infty(t) - T_1(t)}{R_{1\infty}} + \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_{12}} + P s(t)$$

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{riscaldamento ON} \\ 0 & \text{riscaldamento OFF} \end{cases}$$

$P$  = potenza termica immessa nel generico ambiente  
quando l'unità di riscaldamento è ON

$$C_2 \dot{T}_2 = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_{12}} + \frac{T_3(t) - T_2(t)}{R_{23}}$$

$$C_3 \dot{T}_3 = \frac{T_\infty(t) - T_3(t)}{R_{3\infty}} + \frac{T_2(t) - T_3(t)}{R_{23}} + P s(t)$$

Riordinando in forma esplicita le equazioni di stato si ottiene:

$$C_1 \dot{T}_1 = \frac{T_\infty(t) - T_1(t)}{R_{1\infty}} + \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_{12}} + Ps(t)$$

$$\dot{T}_1 = -\frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_{1\infty}} + \frac{1}{R_{12}} \right) T_1(t) + \frac{1}{C_1 R_{12}} T_2(t) + \frac{1}{C_1 R_{1\infty}} T_\infty(t) + \frac{P}{C_1} s(t)$$

$$C_2 \dot{T}_2 = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_{12}} + \frac{T_3(t) - T_2(t)}{R_{23}}$$

$$\dot{T}_2 = \frac{1}{C_2 R_{12}} T_1(t) - \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \right) T_2(t) + \frac{1}{C_2 R_{23}} T_3(t)$$

$$C_3 \dot{T}_3 = \frac{T_\infty(t) - T_3(t)}{R_{3\infty}} + \frac{T_2(t) - T_3(t)}{R_{23}} + Ps(t)$$

$$\dot{T}_3 = \frac{1}{C_3 R_{23}} T_2(t) - \frac{1}{C_3} \left( \frac{1}{R_{3\infty}} + \frac{1}{R_{23}} \right) T_3(t) + \frac{1}{C_3 R_{3\infty}} T_\infty(t) + \frac{P}{C_3} s(t)$$

Esplicitiamo il modello in VdS a tempo continuo, e ricaviamone le matrici

$$x(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{Vettore di stato} \quad u(t) = \begin{bmatrix} T_\infty(t) \\ s(t) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Ingressi} \\ \text{manipolabili e} \\ \text{disturbanti} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1(t) \\ \dot{T}_2(t) \\ \dot{T}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_{1\infty}} + \frac{1}{R_{12}} \right) & \frac{1}{C_1 R_{12}} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_{12}} & -\frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \right) & \frac{1}{C_2 R_{23}} \\ 0 & \frac{1}{C_3 R_{23}} & -\frac{1}{C_3} \left( \frac{1}{R_{3\infty}} + \frac{1}{R_{23}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_{1\infty}} & \frac{P}{C_1} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{C_3 R_{3\infty}} & \frac{P}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\infty(t) \\ s(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1(t) \\ \dot{T}_2(t) \\ \dot{T}_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} T_\infty(t) \\ s(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_{1\infty}} + \frac{1}{R_{12}} \right) & \frac{1}{C_1 R_{12}} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_{12}} & -\frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \right) & \frac{1}{C_2 R_{23}} \\ 0 & \frac{1}{C_3 R_{23}} & -\frac{1}{C_3} \left( \frac{1}{R_{3\infty}} + \frac{1}{R_{23}} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_{1\infty}} & \frac{P}{C_1} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{C_3 R_{3\infty}} & \frac{P}{C_3} \end{bmatrix}$$

La matrice  $C$  della trasformazione in uscita definisce quali **misure** siano disponibili, e come queste siano correlate alle variabili di stato ed agli ingressi.

Nel caso in esame:

$$y(t) = T_2(t) = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} T_\infty(t) \\ s(t) \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$D = [0 \quad 0]$$

## Parametri

$$R_{1\infty} = 5 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{kW}}$$

$$R_{12} = 3 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{kW}}$$

$$R_{23} = 3 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{kW}}$$

$$R_{3\infty} = 5 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{kW}}$$

$$C_1 = 0.4 \frac{\text{kWh}}{^{\circ}\text{C}}$$

$$C_2 = 0.25 \frac{\text{kWh}}{^{\circ}\text{C}}$$

$$C_3 = 0.8 \frac{\text{kWh}}{^{\circ}\text{C}}$$

$$P = 4 \text{ kW}$$

```
clear all
clc
```

```
R1inf=5; R12=3; R23=3; R3inf=5;
C1=0.4; C2=0.25; C3=.8;
P=4;
```

```
A=[-1/C1*(1/R1inf+1/R12) 1/(C1*R12) 0;
    1/(C2*R12) -1/C2*(1/R12+1/R23) 1/(C2*R23);
    0 1/(C3*R23) -1/C3*(1/R23+1/R3inf)]
```

```
B=[1/(C1*R1inf) P/(C1);
    0 0;
    1/(C3*R3inf) P/(C3)]
```

```
C=[0 1 0]
D=[0 0]
```

```
A =
```

```
-1.3333    0.8333    0
 1.3333   -2.6667    1.3333
 0         0.4167   -0.6667
```

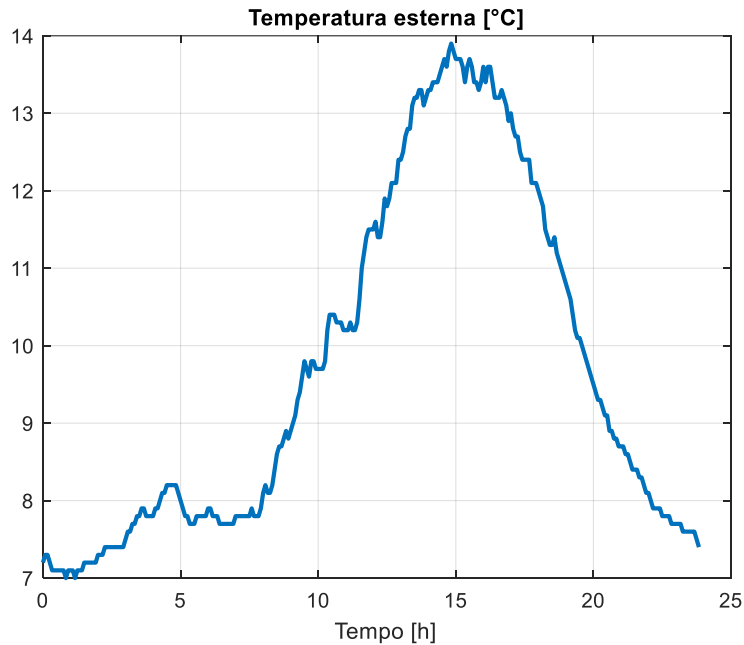
```
B =
```

```
0.5000   10.0000
 0         0
0.2500    5.0000
```

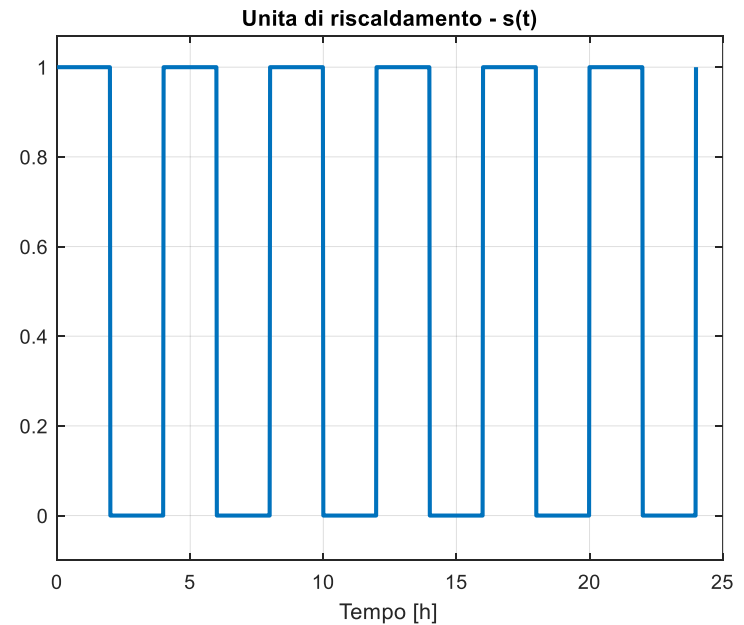
# Simulazione del sistema

## Ingressi

### Temperatura esterna [ $T_{\infty}(t)$ ]

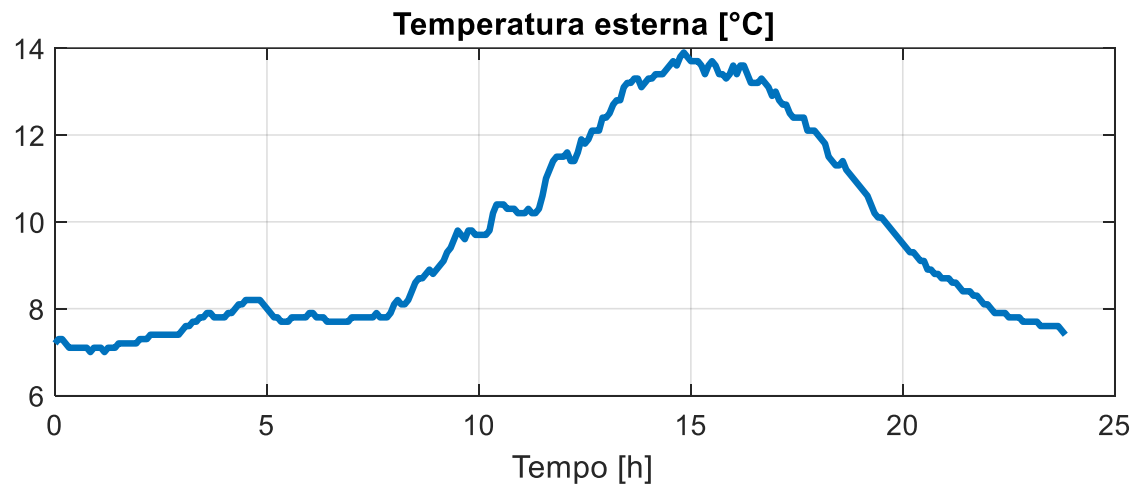
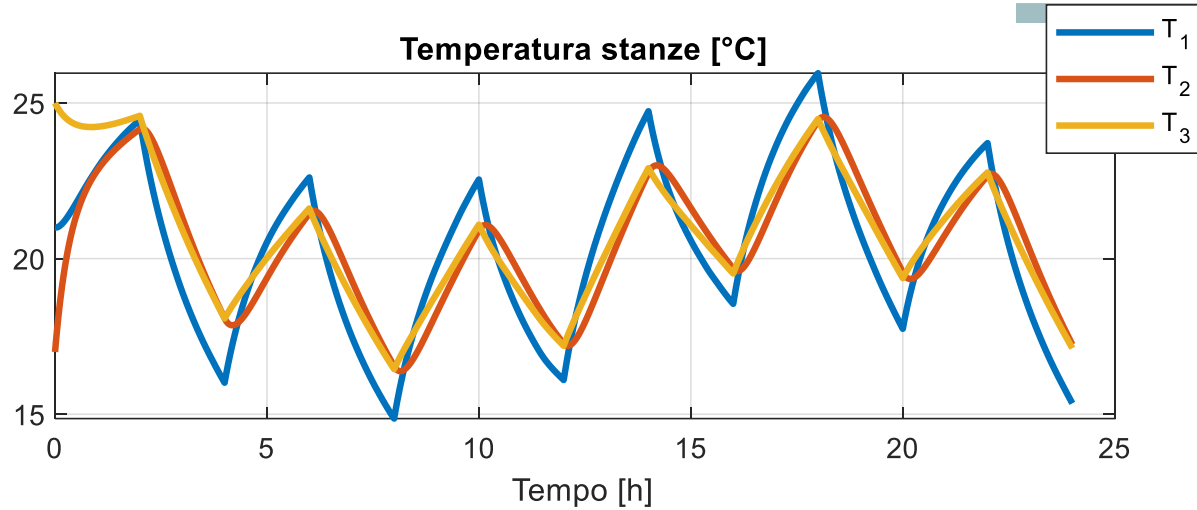


### Segnale di accensione della unita di riscaldamento [ $s(t)$ ]



Condizioni iniziali:

$$T(0) = \begin{bmatrix} T_1(0) \\ T_2(0) \\ T_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 17 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 25 \text{ } ^\circ\text{C} \end{bmatrix}$$



I dati della temperatura esterna sono caricati da un file esterno con il comando

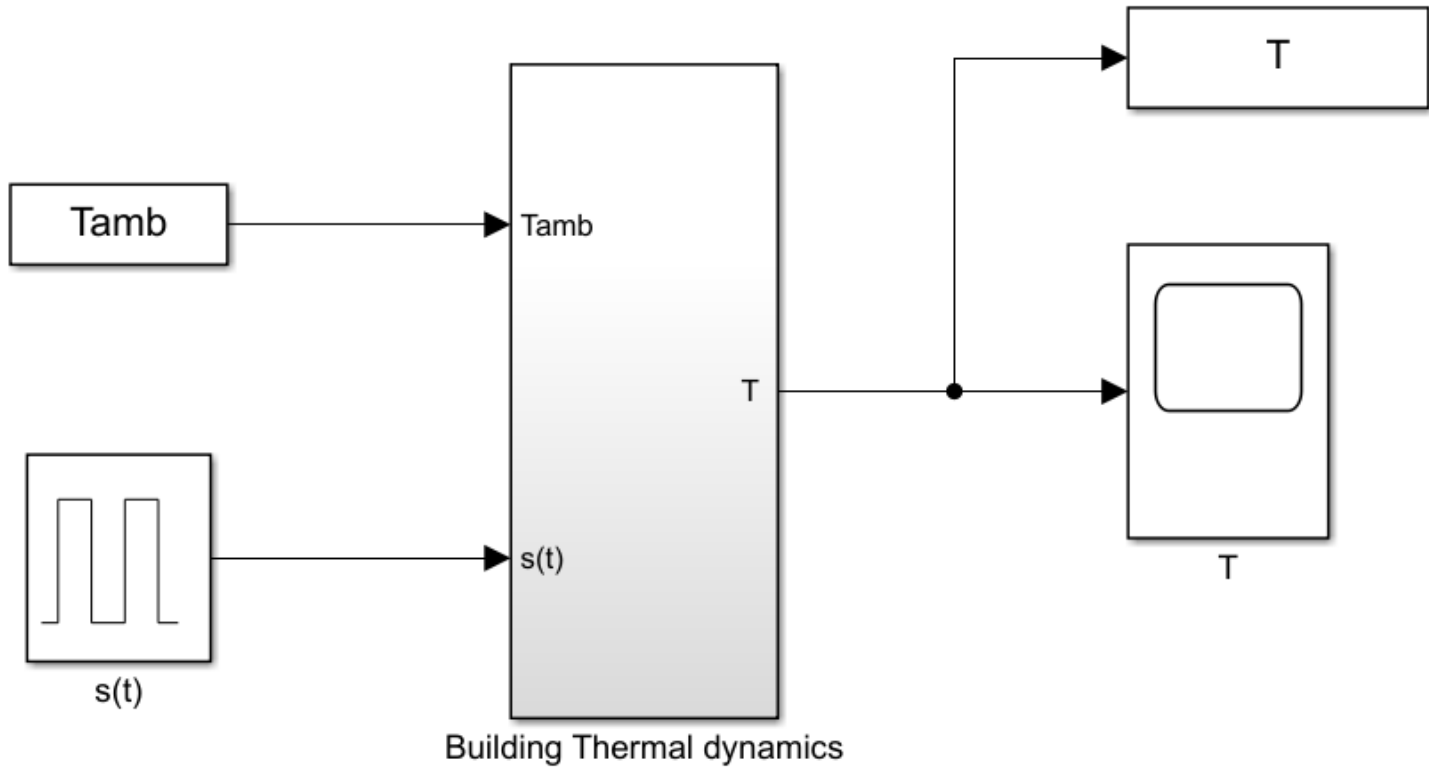
```
load CagliariText1gennaio2021
```

### Files:

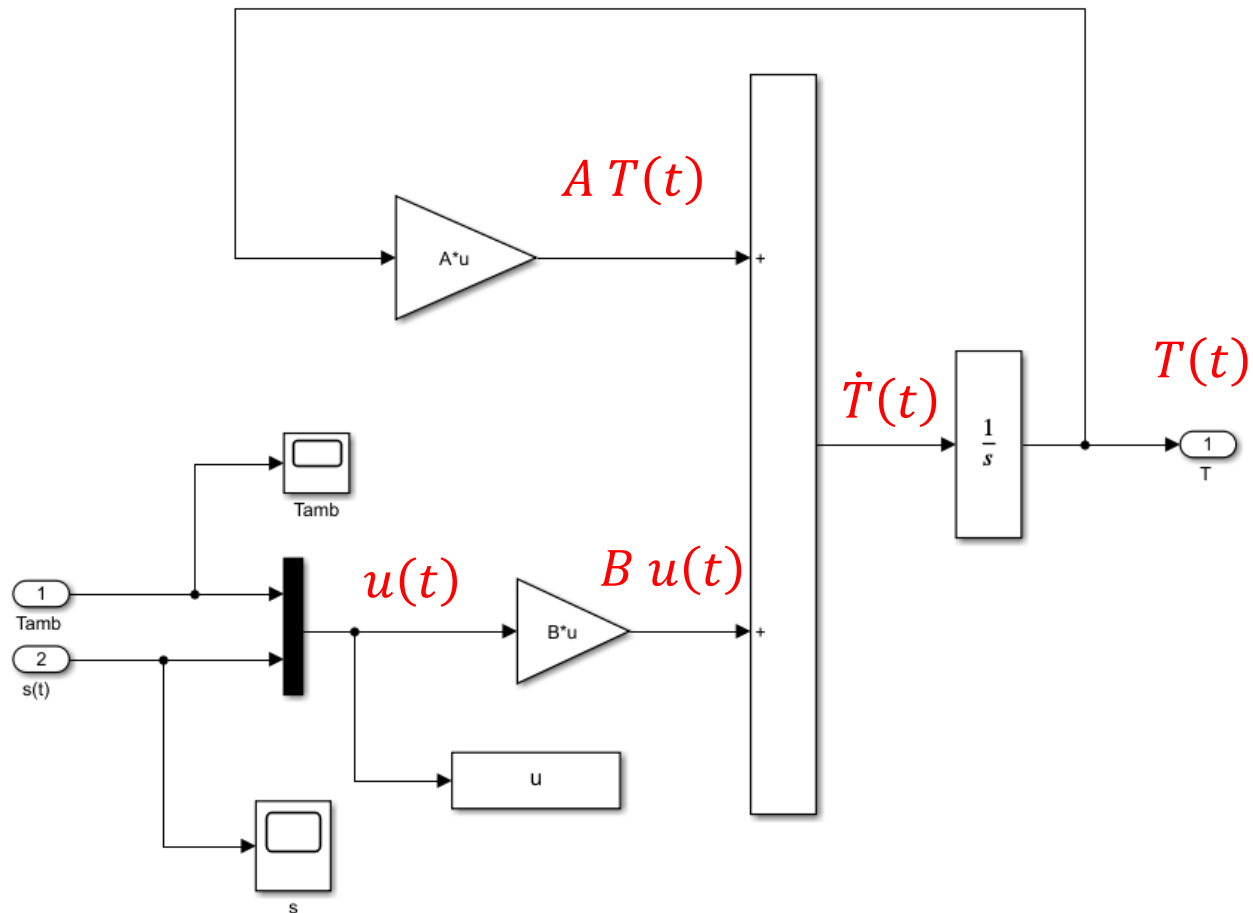
TemperatureEstimation3zonescript.m

Edificio\_modello.slx

Edificio\_modello.slx



## Contenuto del Subsystem «Building Thermal Dynamics»



## Analisi del modello

```
AutovaloriA=eig(A)
```

```
CostantiTempo=-1./AutovaloriA
```

```
AutovaloriA =
```

```
-3.4057
```

```
-1.0000
```

```
-0.2610
```

```
CostantiTempo =
```

```
0.2936
```

```
1.0000
```

```
3.8314
```

**Il sistema è asintoticamente stabile**

Costante di tempo dominante  $\approx 3.8 h$

## Progetto dell'osservatore di stato a tempo continuo

### Verifica osservabilità

Verifichiamo l'**osservabilità** della coppia (A,C)

$$M_{oss} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

```
Moss=obsv(A,C)
rangoMoss=rank(Moss)
```

```
Moss =
      0      1.0000      0
  1.3333  -2.6667  1.3333
 -5.3333   8.7778 -4.4444

rangoMoss =
      3
```

La matrice di osservabilità ha rango pieno. E' pertanto possibile costruire un osservatore di Luenberger con dinamica arbitraria

Si verifichi l'osservabilità del sistema qualora in alternativa alla temperatura della stanza #2 si misuri la temperatura della stanza #1 o della stanza #3

```
disp('Osservabilità con y=T1:')
C2=[1 0 0]
Moss2=obsv(A,C2)
rangoMoss2=rank(Moss2)
```

```
disp('Osservabilità con y=T3:')
C3=[0 0 1]
Moss3=obsv(A,C3)
rangoMoss3=rank(Moss3)
```

Osservabilità con y=T1:

C2 =

```
1 0 0
```

Moss2 =

```
1.0000 0 0
-1.3333 0.8333 0
2.8889 -3.3333 1.1111
```

rangoMoss2 =

```
3
```



Osservabilità con y=T3:

C3 =

```
0 0 1
```

Moss3 =

```
0 0 1.0000
0 0.4167 -0.6667
0.5556 -1.3889 1.0000
```

rangoMoss3 =

```
3
```



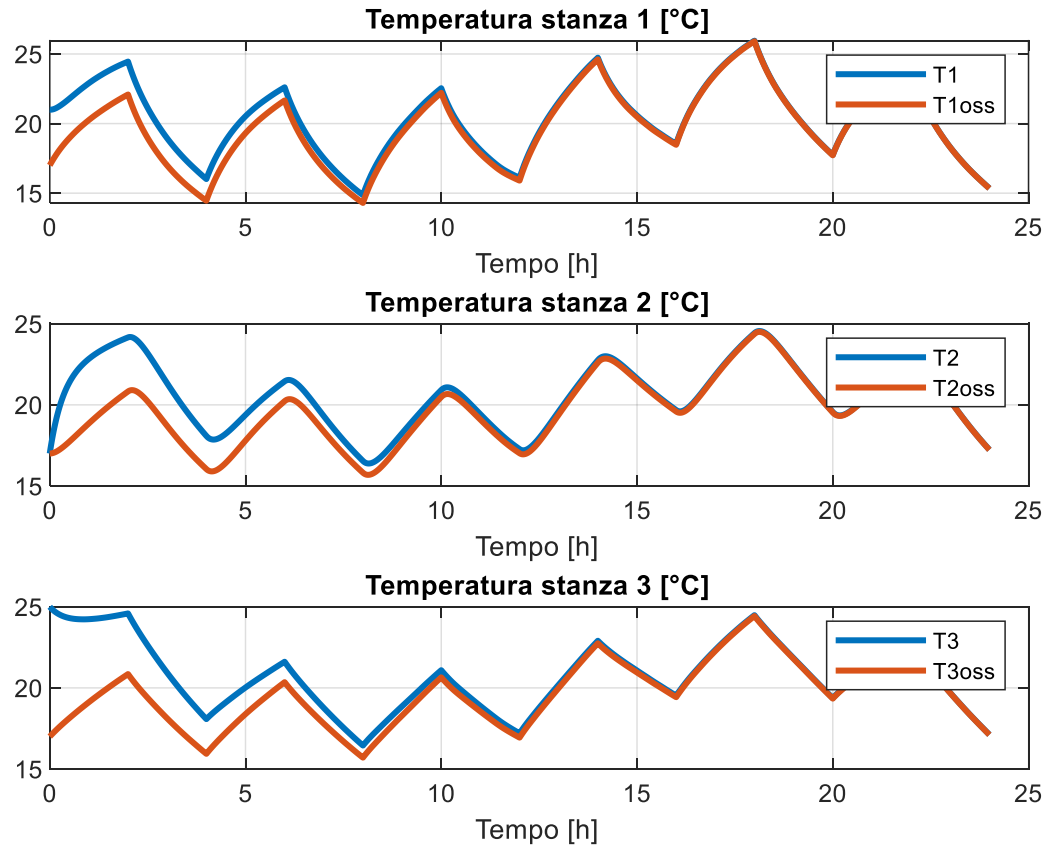
## Osservatore identità

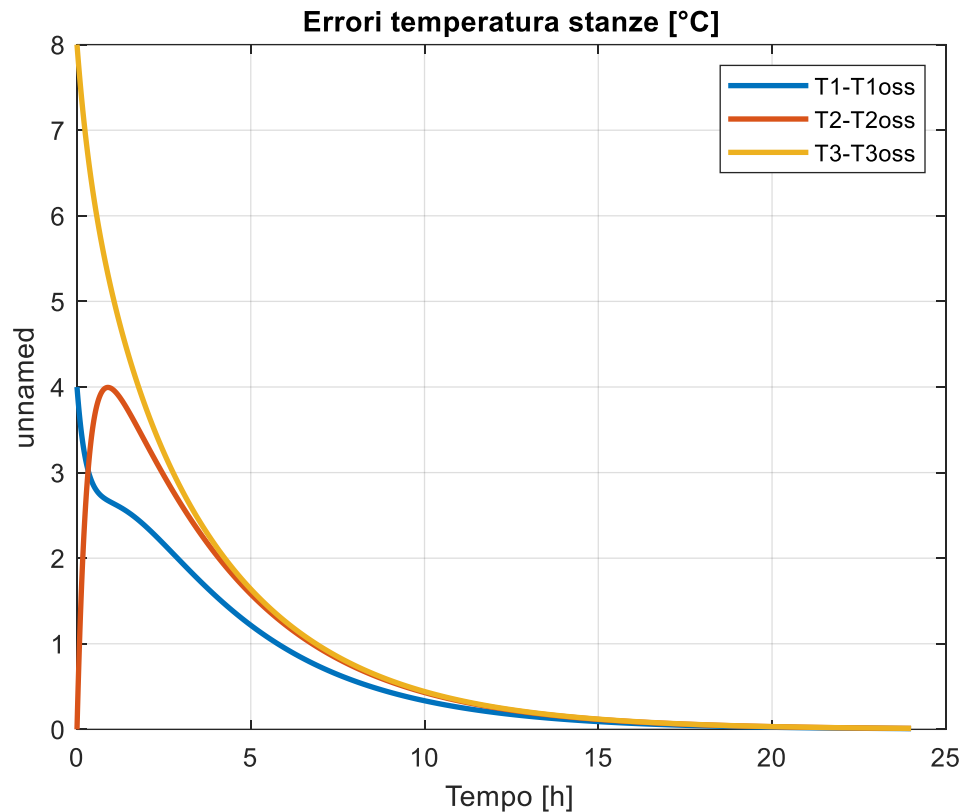
$$\dot{\hat{T}}(t) = A\hat{T}(t) + Bu(t)$$

$$\hat{T}(0) = \begin{bmatrix} 17^\circ\text{C} \\ 17^\circ\text{C} \\ 17^\circ\text{C} \end{bmatrix}$$

Confronto fra i profili di temperatura effettivi e quelli stimati dall'osservatore

Condizioni iniziali **diverse** da quelle del processo





Differenze fra le temperature effettive e osservate

La durata del transitorio è pari a circa 5 volte la costante di tempo dominante

La rapidità di convergenza dipende dalla dinamica del sistema originario e non può essere alterata

**Files:**

TemperatureEstimation3zonescript.m

Edificio\_Ossid.slx

## Osservatore di Luenberger

$$\begin{aligned}\dot{\hat{T}}(t) &= A\hat{T}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{T}(t)] \\ &= A\hat{T}(t) + Bu(t) + L[T_2(t) - \hat{T}_2(t)]\end{aligned}$$

Scegliamo come autovalori desiderati per la matrice  $A - LC$  gli autovalori della matrice  $A$  moltiplicati per 5

```
Autovdes=5*AutovaloriA
```

```
Autovdes =
```

```
-17.0283  
-5.0000  
-1.3050
```

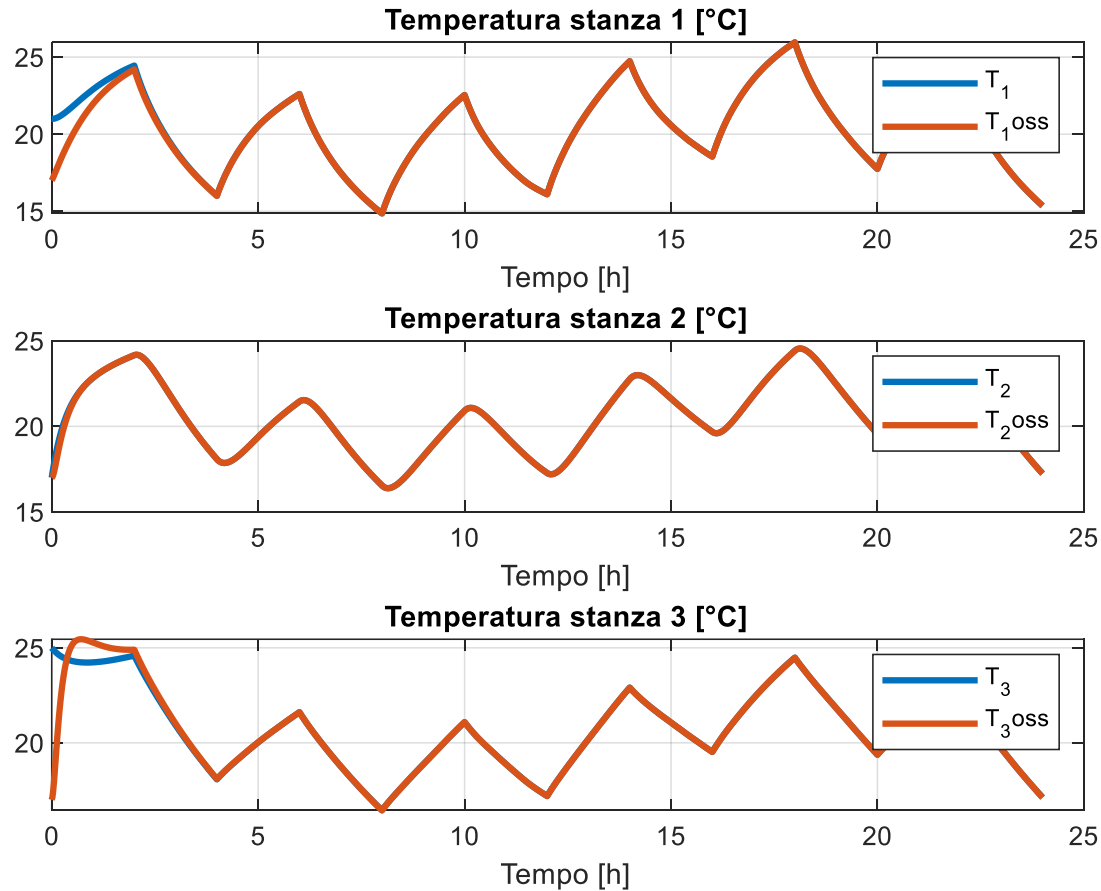
Determiniamo la matrice  $L$  dei guadagni dell'osservatore

```
L = place(A', C', Autovdes)'
```

```
L =
```

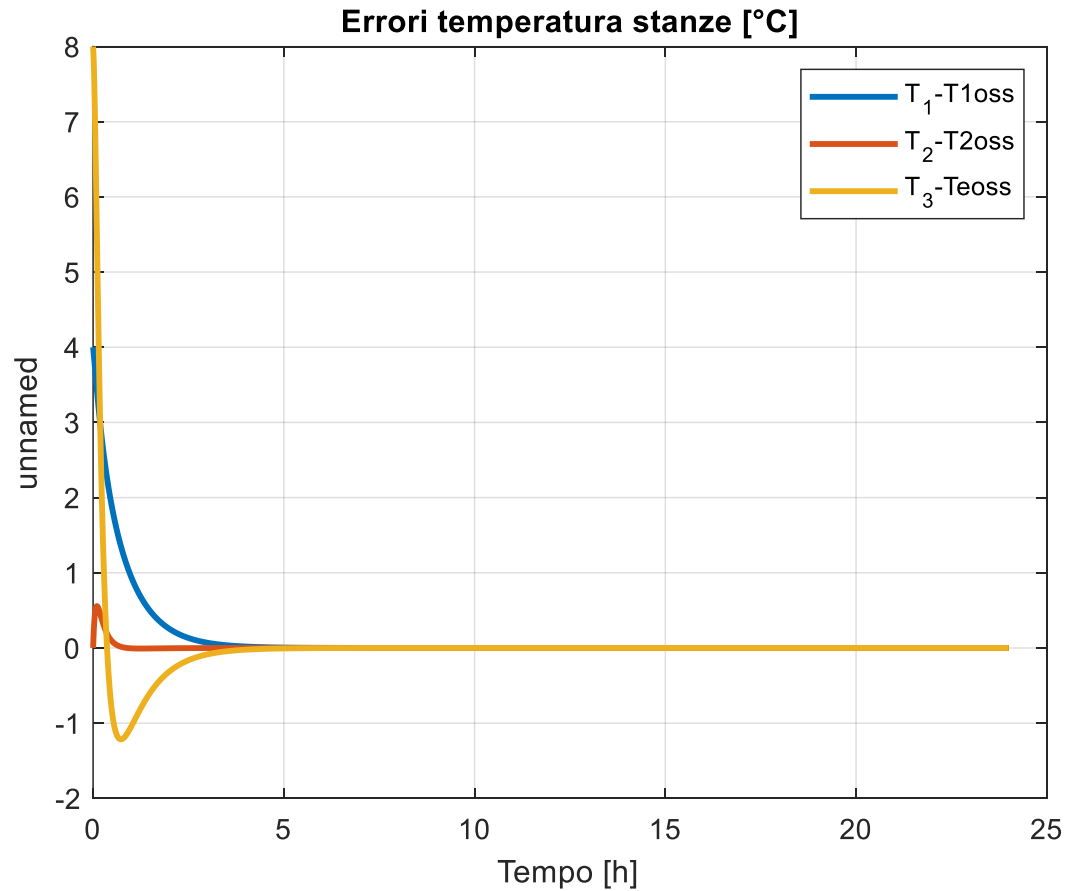
```
2.6667  
18.6667  
51.3333
```

## Risultati ottenuti



Transitorio di convergenza molto più rapido rispetto all'osservatore Identità

## Errori di osservazione



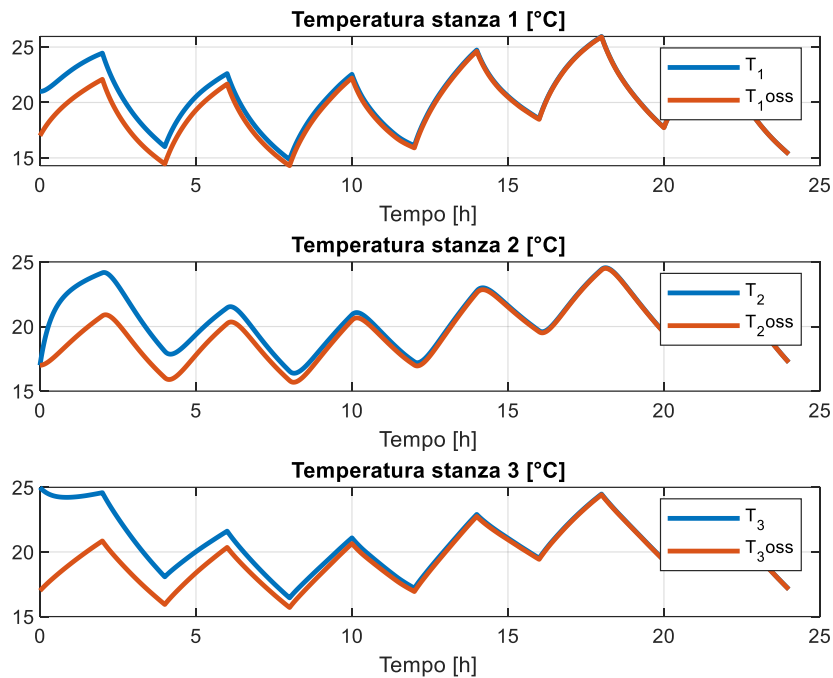
### Files:

TemperatureEstimation3zonescript.m

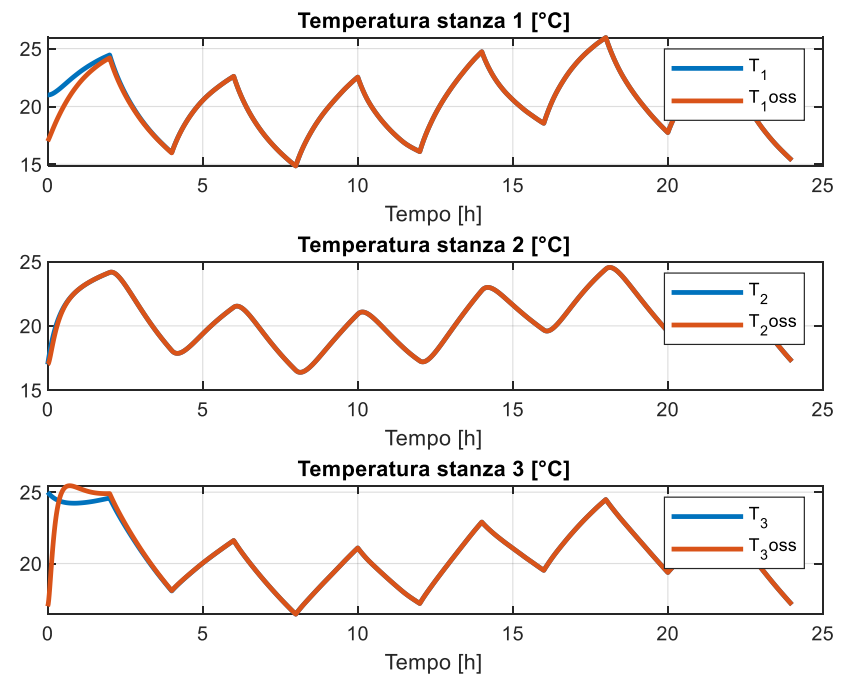
Edificio\_Luenberger.slx

## Confronto

### Osservatore identità



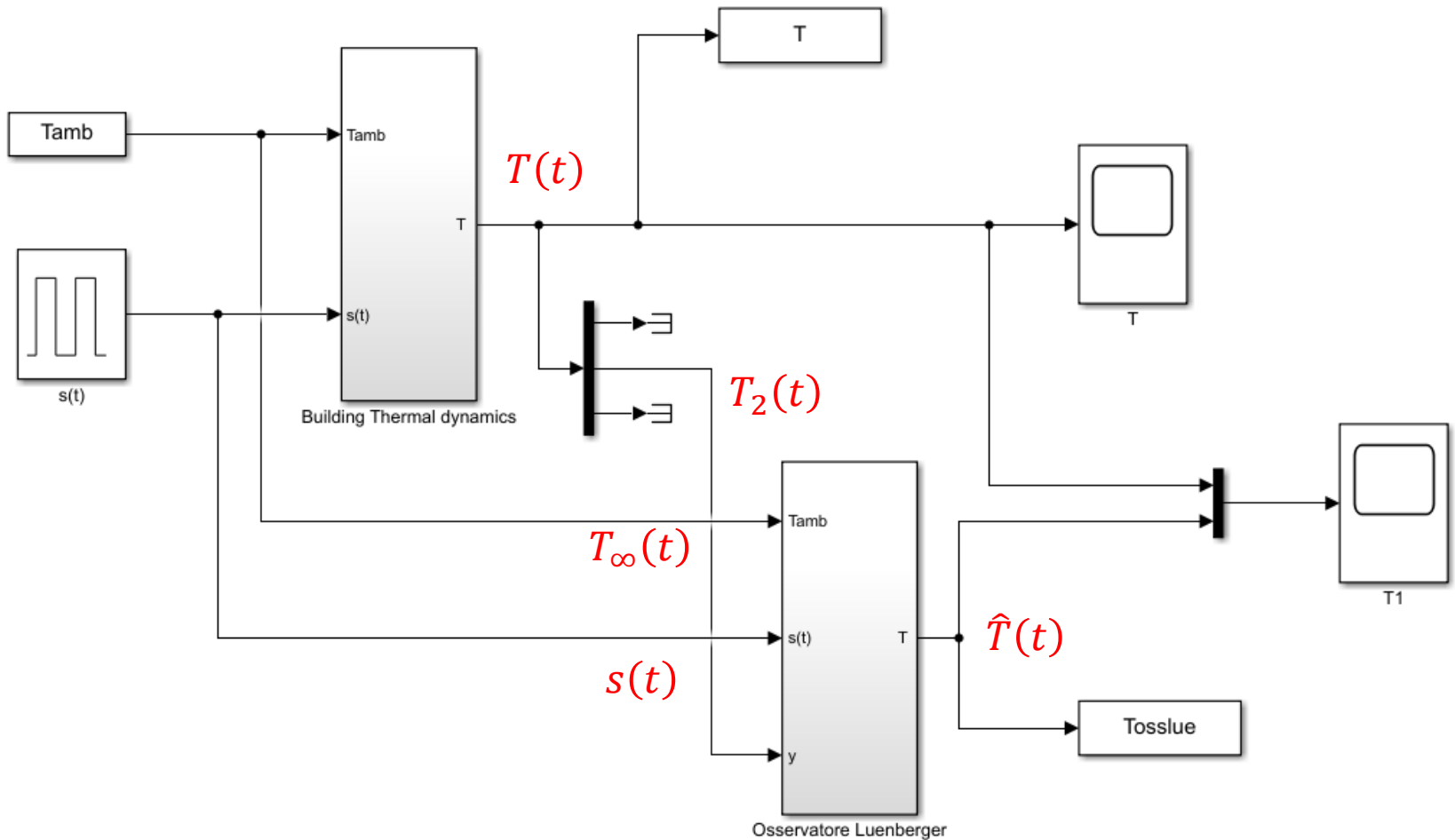
### Osservatore di Luenberger



Transitorio di convergenza molto più rapido rispetto all'osservatore Identità

Può essere ulteriormente velocizzato collocando gli autovalori di  $A - LC$  ancora più a sinistra rispetto a quando fatto nel test.

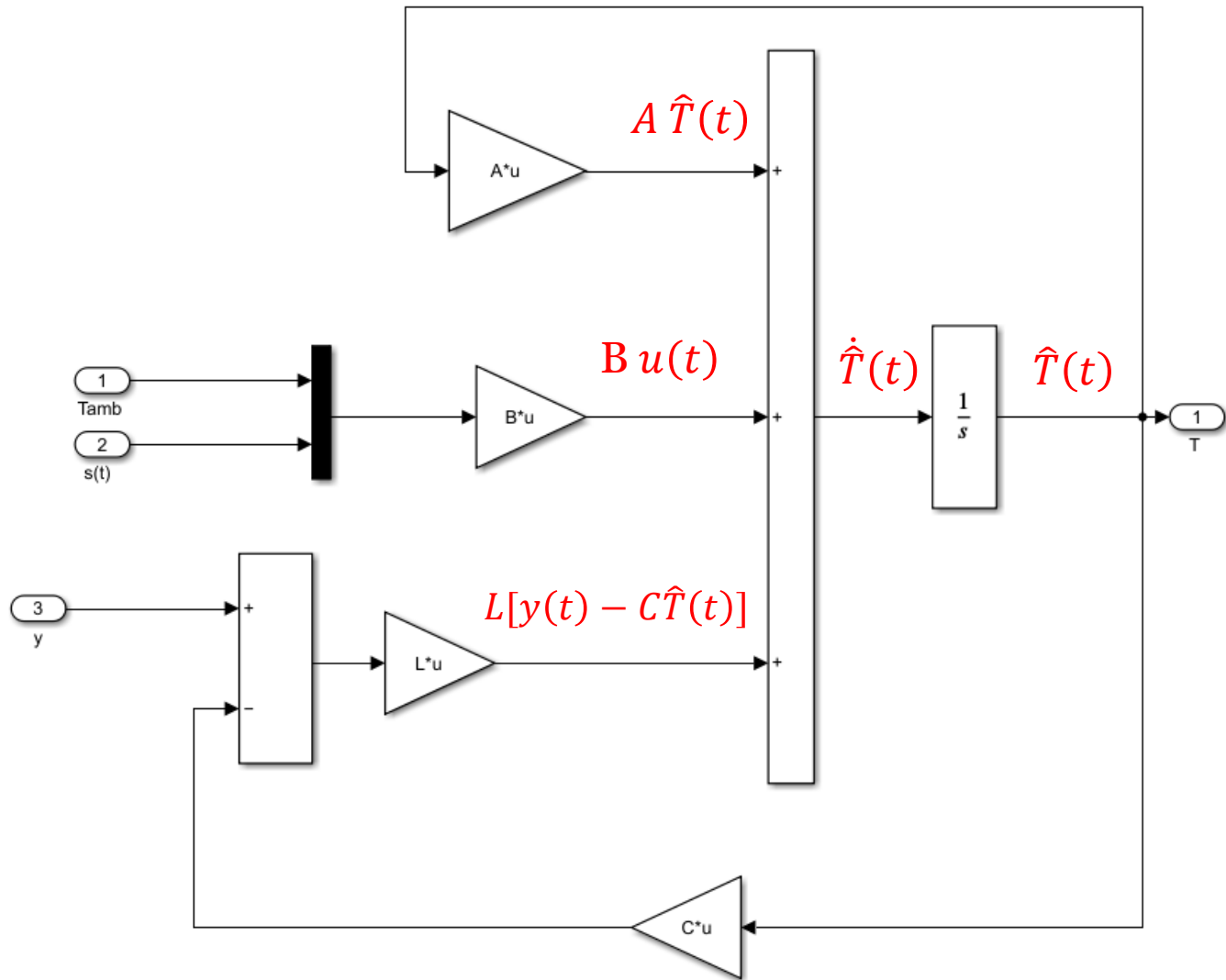
## Edificio\_Luenberger.slx



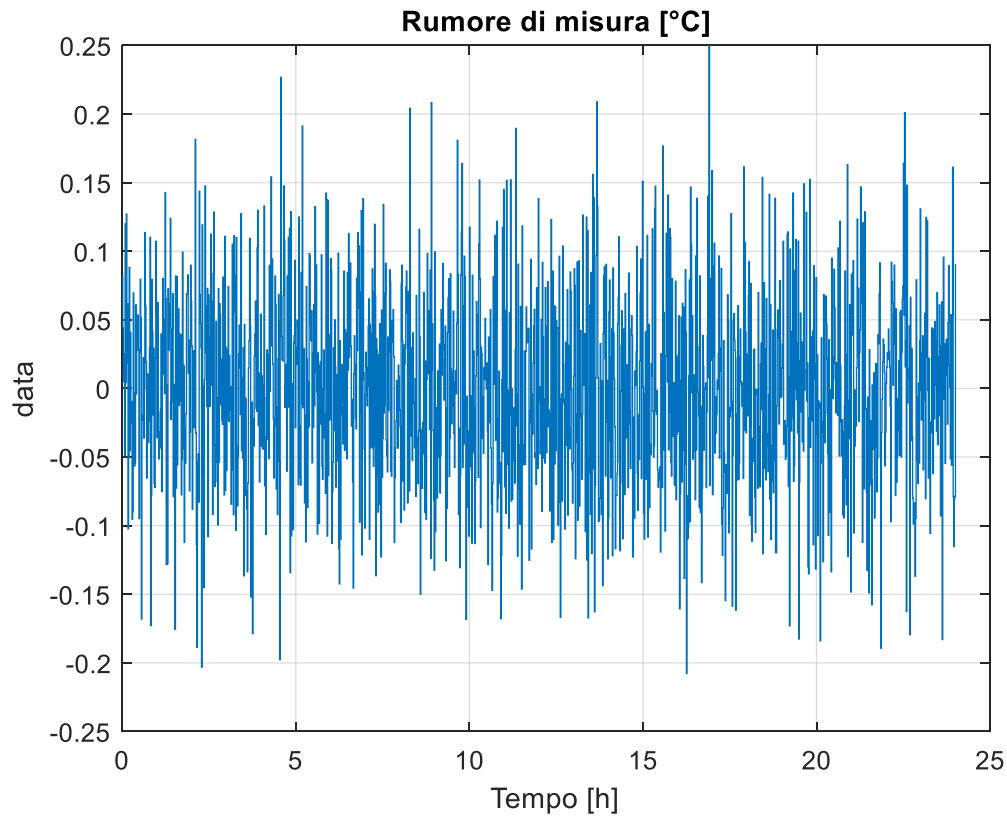
La dinamica termica dell'edificio e l'osservatore di Luenberger sono simulati con passo di campionamento di 1 secondo

L'osservatore riceve in input gli ingressi  $T_{\infty}(t)$  ed  $s(t)$  al modello e la misura della temperatura  $T_2(t)$

# Interno del Subsystem «Osservatore Luenberger»

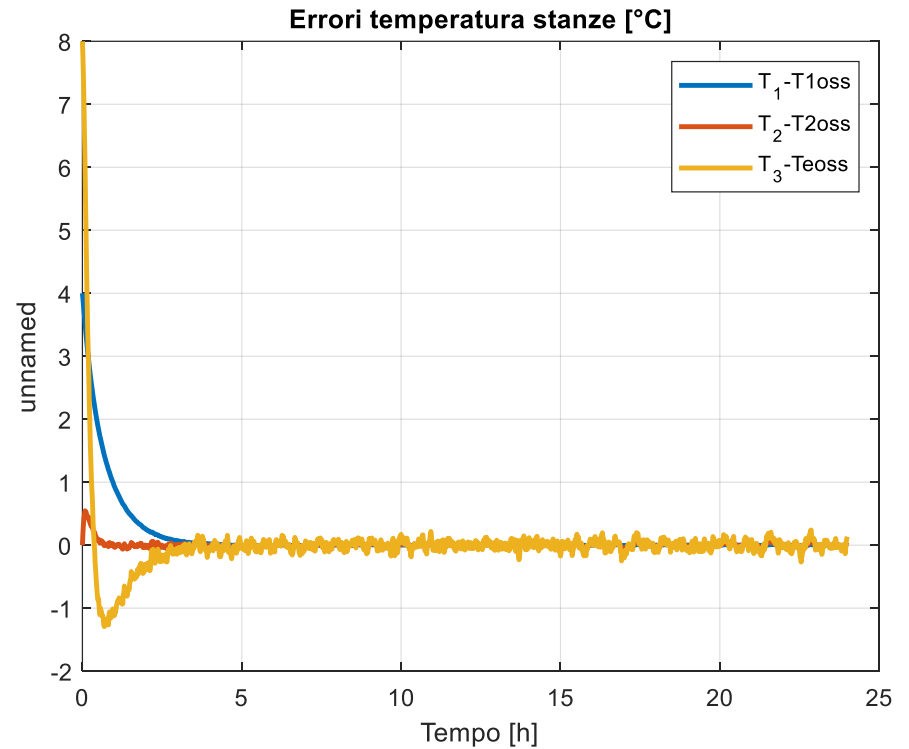
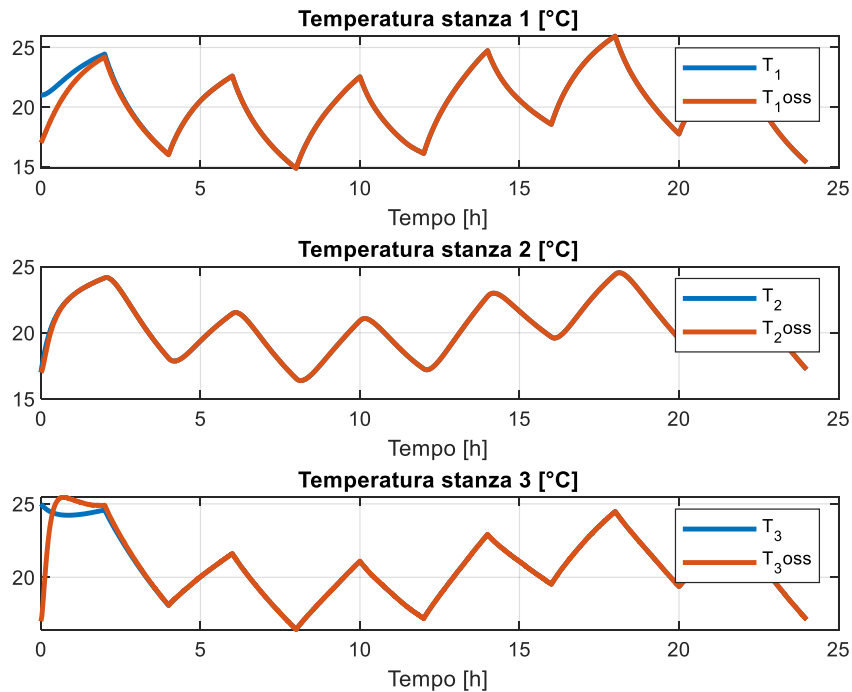


Ora testiamo il comportamento dell'osservatore in presenza di **rumore di misura**



rumore gaussiano con  
varianza  $R=0.005$

Buon comportamento dell'osservatore. Le stime sono sufficientemente accurate.



Cosa succede se tentiamo di implementare un osservatore la cui dinamica di convergenza sia estremamente (eccessivamente) rapida?

Succede che andiamo a realizzare un osservatore che **amplifica il rumore di misura**.

Collochiamo gli autovalori desiderati della matrice  $A - LC$  molto più a «sinistra» nel piano complesso

```
Autovdes=50*AutovaloriA
```

```
L = place(A',C', Autovdes)'
```

```
Autovdes =
```

```
-170.2832
```

```
-50.0000
```

```
-13.0502
```

```
L =
```

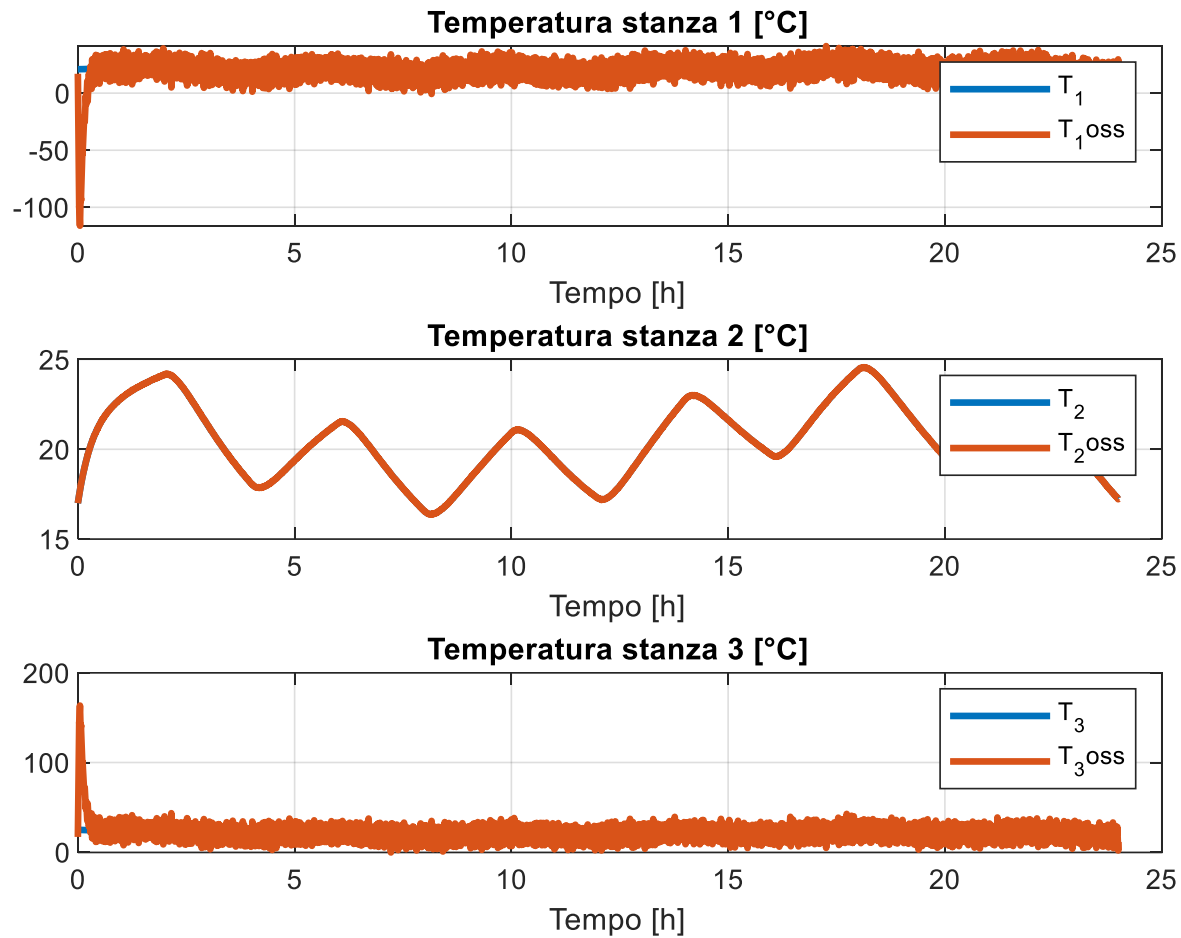
```
1.0e+05 *
```

```
-1.0838
```

```
0.0023
```

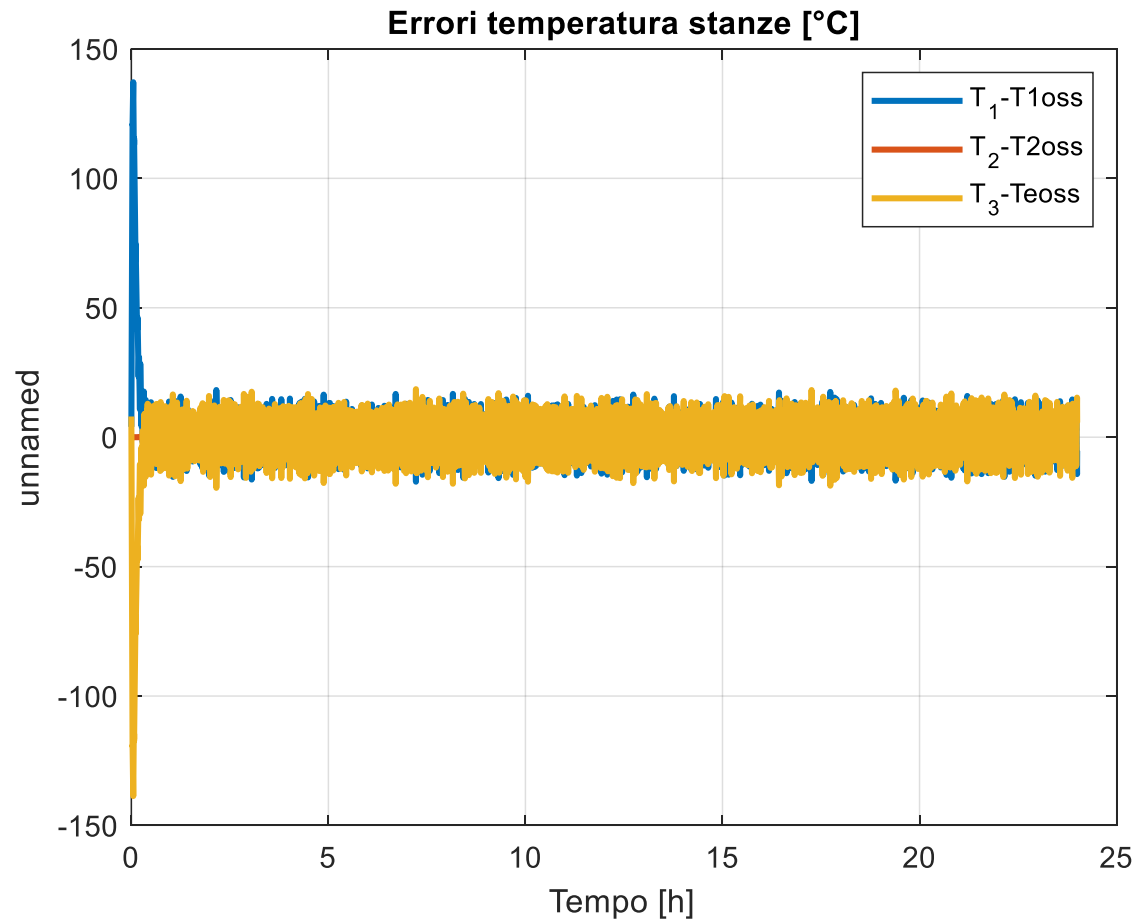
```
1.1658
```

Guadagni molto maggiori



Le stime delle temperature non misurate direttamente sono **inutilizzabili**

## Differenze fra le temperature effettive e osservate



Sebbene l'osservatore di Luenberger possa essere tarato in modo da garantire un processo di convergenza arbitrariamente rapido, nella pratica si deve ricercare un **compromesso** onde non rendere l'osservatore eccessivamente sensibile agli inevitabili rumori di misura

Una diversa tipologia di osservatore che sarà presentato nel seguito (Filtro di Kalman) consente di individuare tale compromesso automaticamente, e con certe caratteristiche di ottimalità.

## Progetto a tempo discreto

Ora prendiamo come punto di partenza un modello a tempo discreto della dinamica termica dell'edificio, e progettiamo un osservatore di stato a tempo discreto.

TemperatureEstimation3zonescriptDiscreteTime.m

## Determinazione delle matrici del modello a tempo discreto

```
Tc=1/60; %periodo di campionamento: 1 minuto
```

```
sistemaTC=ss(A,B,C,D);
sistemaTD=c2d(sistemaTC,Tc)
[Ad Bd Cd Dd]=ssdata(sistemaTD)
```

$$\begin{bmatrix} T_1(k+1) \\ T_2(k+1) \\ T_3(k+1) \end{bmatrix} = A_d \begin{bmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ T_3(k) \end{bmatrix} + B_d \begin{bmatrix} T_\infty(k) \\ s(k) \end{bmatrix}$$

```
Ad =
    0.978172695903651    0.013434870904240    0.000150380887458
    0.021495793446784    0.956752092900596    0.021616098156750
    0.000075190443729    0.006755030673984    0.989025859248263

Bd =
    0.008242052304652    0.164841046093036
    0.000136015495871    0.002720309917411
    0.004143919634024    0.082878392680476

Cd =
    0    1    0

Dd =
    0    0
```

## Analisi del modello

```
%% Analisi del modello e verifica osservabilità
```

```
AutovaloriAd=eig(Ad)
```

```
Moss=obsv(Ad,Cd)
```

```
rangoMoss=rank(Moss)
```

```
AutovaloriAd =
```

```
    0.944819798868258  
    0.983471453821618  
    0.995659395362634
```

```
Moss =
```

```
           0    1.000000000000000           0  
    0.021495793446784    0.956752092900596    0.021616098156750  
    0.041594368919210    0.915809377885713    0.042063359761385
```

```
rangoMoss =
```

```
    3
```

## Approfondimenti – conservazione della proprietà di osservabilità a fronte della discretizzazione

Dato un modello in variabili di stato a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

tale che la matrice di osservabilità associata sia a rango pieno, il modello discretizzato

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad A_d = e^{AT_c} \quad B_d = \int_0^{T_c} e^{A\tau} d\tau B$$

$$y(k) = Cx(k)$$

ha anche esso matrice di osservabilità a rango pieno **se e solo se** la matrice  $A$  non possiede autovalori la cui parte immaginaria differisca per multipli interi della pulsazione di campionamento  $\omega_c = 2\pi / T_c$

## Progetto osservatore

```
Autovdesd=[0.8 0.81 0.82]
```

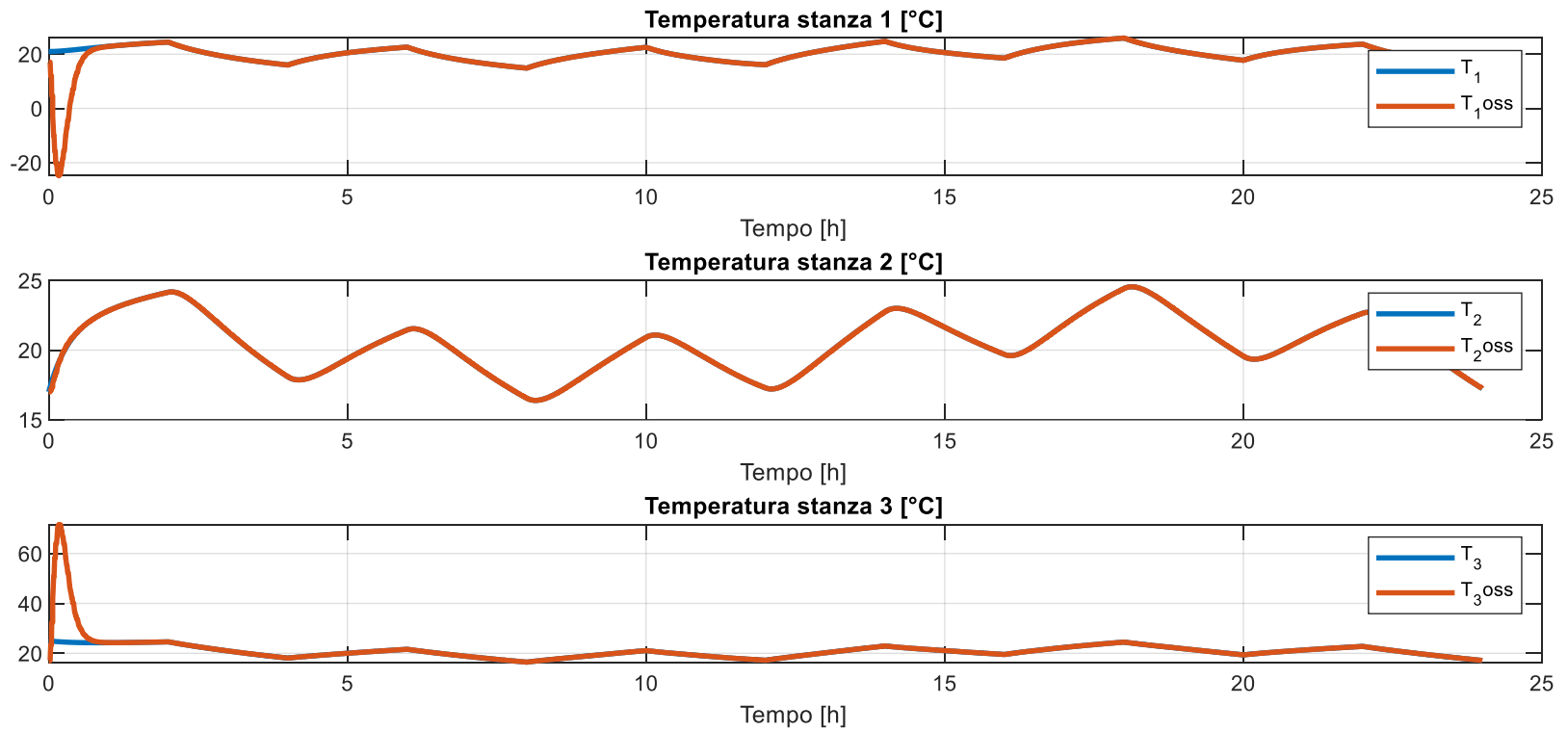
```
L = place(Ad', Cd', Autovdesd)'
```

In base a quanto visto in precedenza, **autovalori collocati nel segmento  $[0,1)$**  garantiscono una convergenza degli errori di osservazione **esente da oscillazioni**.

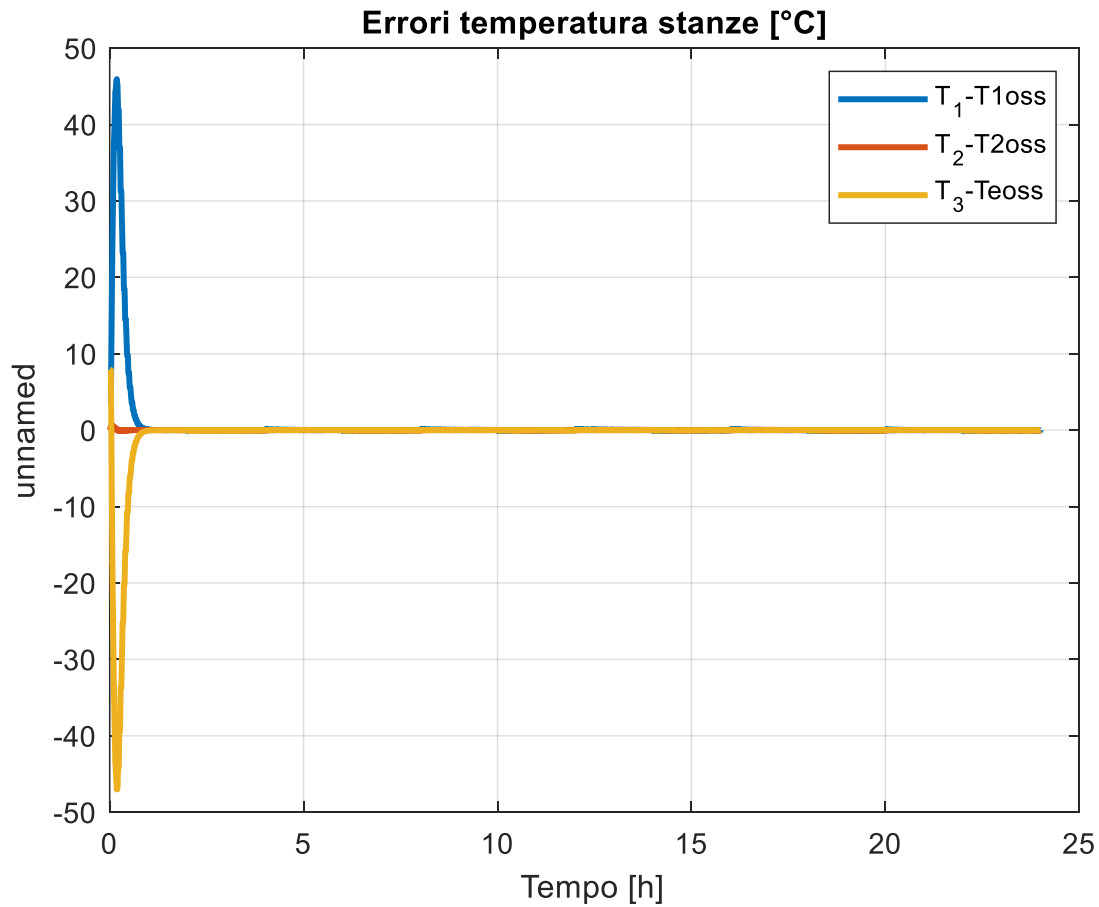
```
L =
```

```
-20.106692804654561  
 0.493950648053625  
24.194177361303559
```

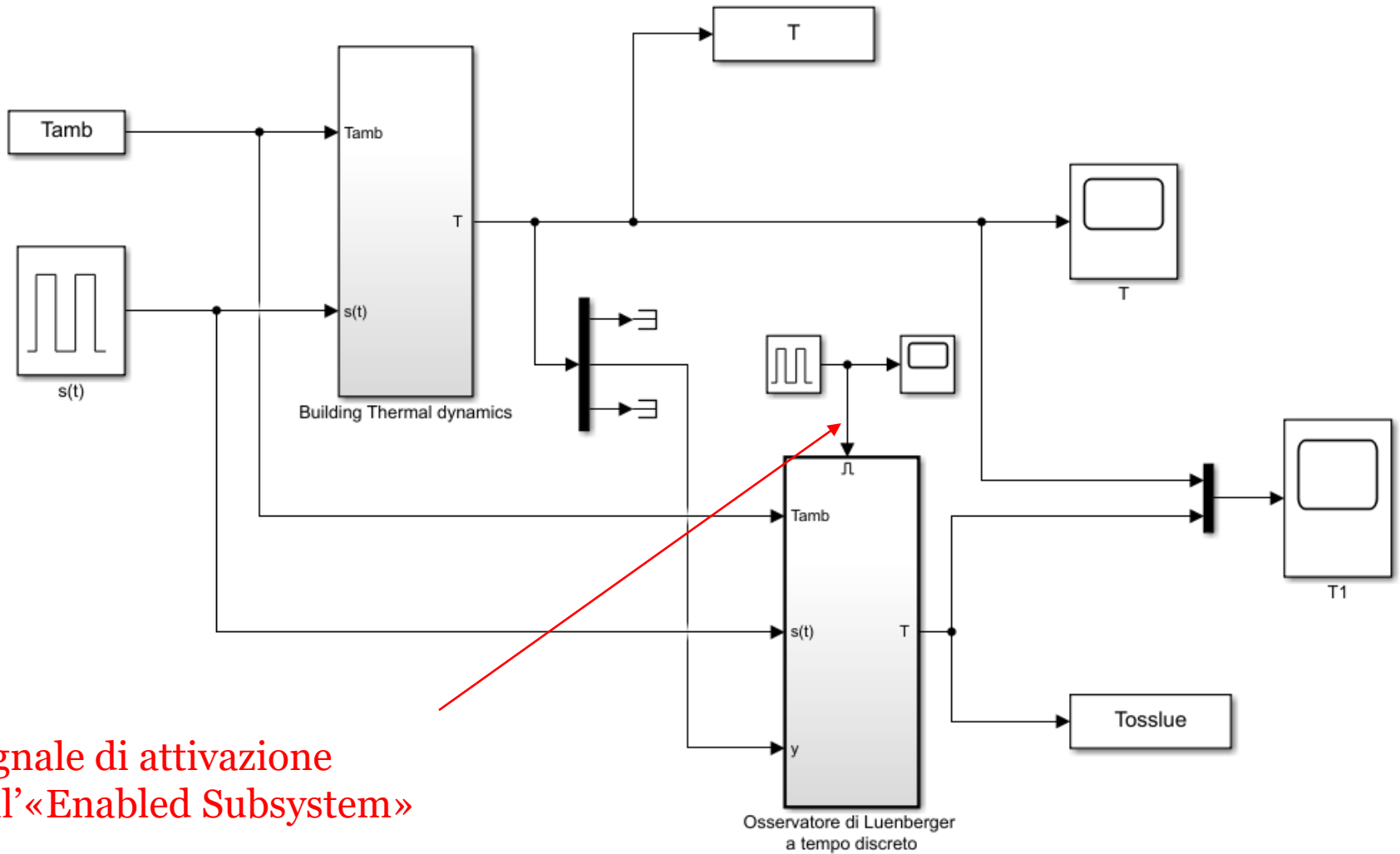
# Risultati



Convergenza monotona degli errori di osservazione.



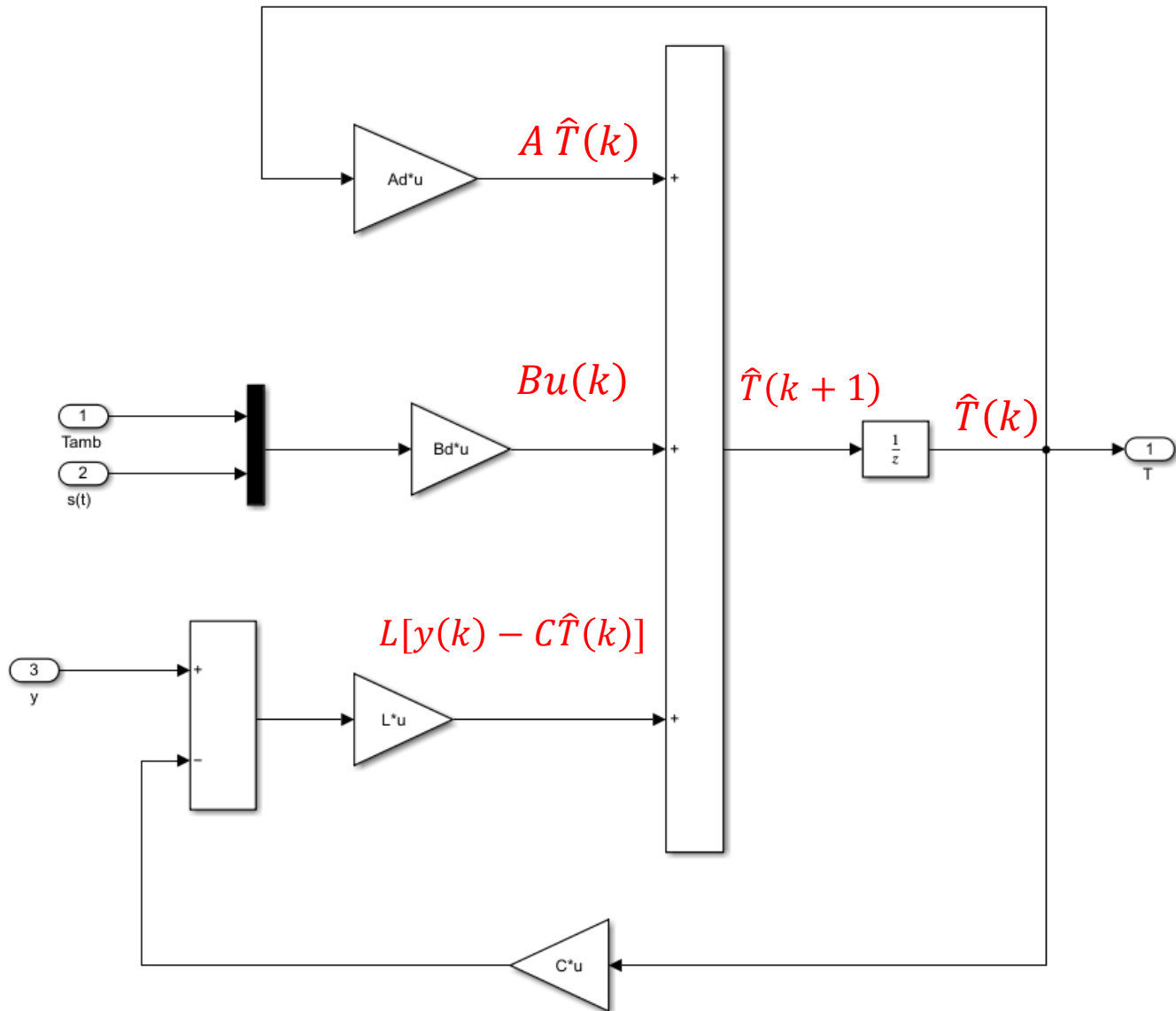
## Edificio\_LuenbergerDiscreteTime.slx



Segnale di attivazione  
dell'«Enabled Subsystem»

«Enabled Subsystem»

# Interno del Subsystem «Osservatore di Luenberger a tempo discreto»



## Stima dei disturbi

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_m(t) \\ d_m(t) \\ d_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$u_m(t)$ : ingressi **manipolabili**

$d_m(t)$ : ingressi disturbanti misurabili

$d_{nm}(t)$ : ingressi disturbanti **non** misurabili

Vi sono vari approcci mediante i quali è possibile, sotto determinate condizioni, **stimare simultaneamente sia lo stato del sistema che uno o più disturbi non misurabili che ne influenzino la dinamica.**

Una delle metodologie di più intuitiva formalizzazione e comprensione prevede che a partire dal sistema originario si costruisca un **modello di ordine aumentato** in cui **i disturbi non misurabili che si desidera stimare sono «inglobati» nel vettore di stato.**

In assenza di un modello matematico che esprima la derivata del disturbo non misurabile, si fa l'approssimazione che tale segnale sia un **segnale costante**, cioè che la sua derivata temporale sia nulla.

Una volta costruito tale modello di ordine aumentato, si implementa un osservatore di Luenberger per la stima dello stato complessivo (che include, in aggiunta alle variabili di stato del sistema originario, anche il disturbo non misurabile)

Tale approccio **non consente la ricostruzione esatta** del disturbo non misurabile (a meno che questo non sia realmente costante) ma nei casi pratici, se il disturbo non misurabile non varia in maniera eccessivamente rapida, si riesce ad ottenere una stima relativamente accurata.

Sviluppiamo un esempio di progetto con riferimento al caso di studio della dinamica termica dell'edificio, considerando come disturbo non misurabile la temperatura esterna  $T_\infty(t)$  e progettando un osservatore che ne consenta la ricostruzione approssimata.

## Equazioni di stato

$$\dot{T}_1 = -\frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_{1\infty}} + \frac{1}{R_{12}} \right) T_1(t) + \frac{1}{C_1 R_{12}} T_2(t) + \frac{1}{C_1 R_{1\infty}} T_\infty(t) + \frac{P}{C_1} s(t)$$

$$\dot{T}_2 = \frac{1}{C_2 R_{12}} T_1(t) - \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \right) T_2(t) + \frac{1}{C_2 R_{23}} T_3(t)$$

$$\dot{T}_3 = \frac{1}{C_3 R_{23}} T_2(t) - \frac{1}{C_3} \left( \frac{1}{R_{3\infty}} + \frac{1}{R_{23}} \right) T_3(t) + \frac{1}{C_3 R_{3\infty}} T_\infty(t) + \frac{P}{C_3} s(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} T_\infty(t) \\ s(t) \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_{1\infty}} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{C_3 R_{3\infty}} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{P}{C_1} \\ 0 \\ P \\ \frac{P}{C_3} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$= Ax(t) + B_1 T_\infty(t) + B_2 s(t)$$

$B_1 =$  prima colonna di  $B$

$B_2 =$  seconda colonna di  $B$

Includiamo il disturbo non misurabile  $T_\infty(t)$  che si desidera stimare all'interno di un nuovo vettore di stato «aumentato» che chiamiamo  $\mathbf{z}(t)$

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \\ T_\infty(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ T_\infty(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{T}_\infty(t) \end{bmatrix}$$

approssimando la dinamica del disturbo non misurabile mediante quella di un segnale costante

$$\dot{T}_\infty(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 T_\infty(t) + \mathbf{B}_2 s(t) \\ &= [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}_1] \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_2 s(t) \end{aligned}$$

$$\dot{T}_\infty(t) = 0$$



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0}_{1,3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} s(t) \\ \mathbf{y}(t) &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] \mathbf{z}(t) \end{aligned}$$

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} A & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} s(t)$$



$$y(t) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] z(t)$$

$$\dot{z}(t) = A_z z(t) + B_z s(t)$$

$$y(t) = C_z z(t)$$

$$A_z = \begin{bmatrix} A & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_z = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_z = [C \ 0] = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Abbiamo ricavato un modello **approssimato** di ordine superiore. Se tale modello risulta essere osservabile si può progettare un osservatore di Luenberger

$$\hat{\dot{z}}(t) = A_z \hat{z}(t) + B_z s(t) + L_z [T_2(t) - C_z \hat{T}(t)]$$

**Script:** TemperatureEstimation3zonescriptStimaTinf.m

```
B1=B(:,1)
B2=B(:,2)
Az=[A B1; zeros(1,4)]
Bz=[B2;0]
Cz=[C 0]
```

## Matrici del modello di ordine aumentato

```
Az =
-1.333333333333333  0.833333333333333  0  0.500000000000000
 1.333333333333333 -2.666666666666667  1.333333333333333  0
 0  0.416666666666667 -0.666666666666667  0.250000000000000
 0  0  0  0

Bz =
10
 0
 5
 0

Cz =
0  1  0  0
```

```
AutovaloriAz=eig(Az)
```

```
Obsz=obsv(Az,Cz)
```

```
rank(Obsz)
```

## Analisi di osservabilità

```
AutovaloriAz =
```

```
-3.405663522009431
-1.0000000000000000
-0.261003144657233
      0
```

La matrice  $A_z$  ha un autovalore nullo.  
Il modello di ordine aumentato non è  
asintoticamente stabile

```
Obsz =
```

```
      0      1.0000000000000000      0      0
1.3333333333333333 -2.6666666666666667  1.3333333333333333  0
-5.3333333333333333  8.7777777777777777 -4.4444444444444445  1.0000000000000000
18.814814814814813 -29.703703703703699  14.6666666666666664 -3.7777777777777778
```

```
ans =
```

```
4
```

La matrice di osservabilità del sistema di ordine aumentato ha rango pieno



$$\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_z \hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}_z s(t) + L_z [T_2(t) - \mathbf{C}_z \hat{\mathbf{T}}(t)]$$

```
%% Progetto osservatore
```

```
Autovdes=[-2 -3 -4 -5] →
```

Autovalori desiderati per la matrice  
 $\mathbf{A}_z - L_z \mathbf{C}_z$

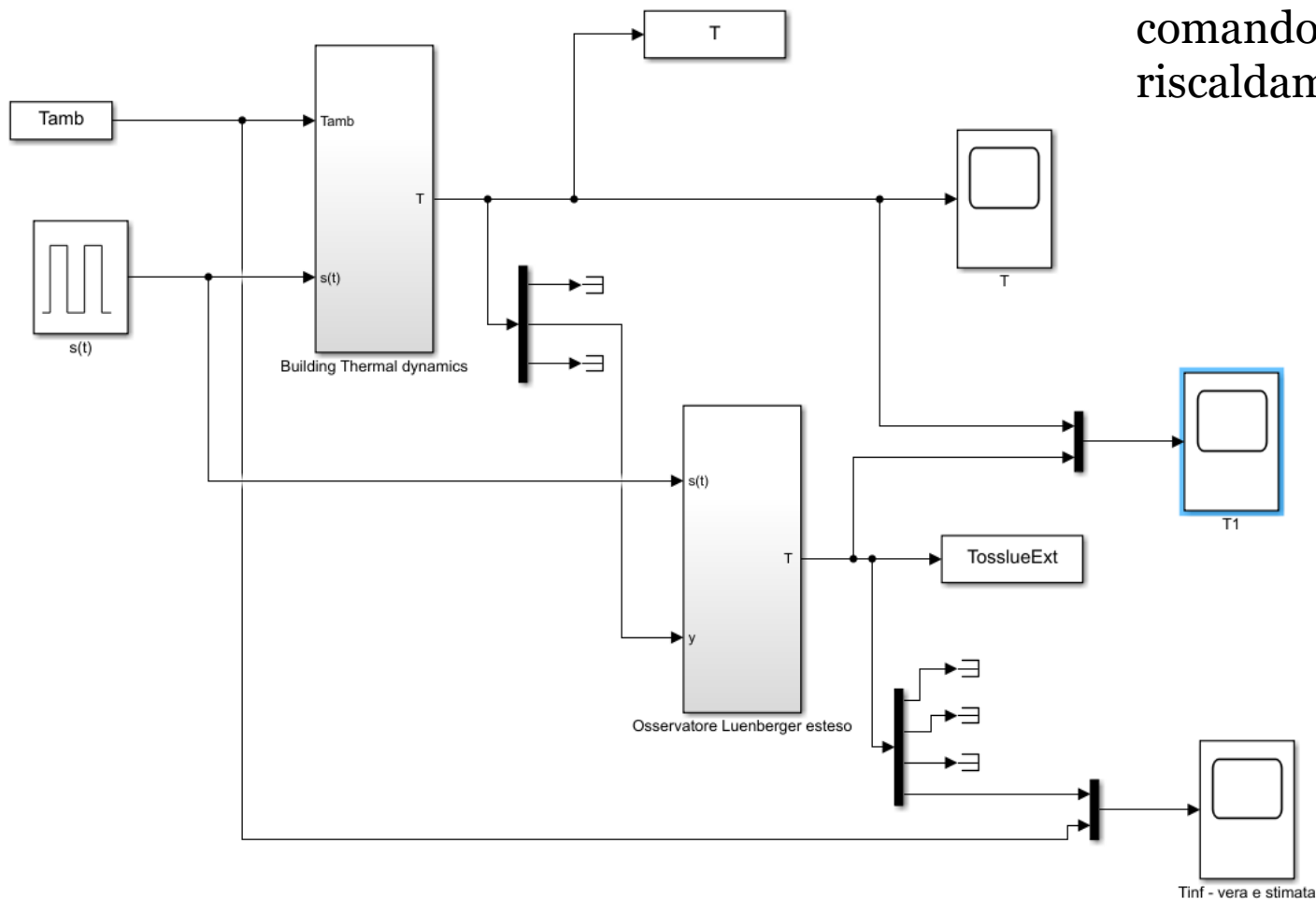
```
Lz = place(Az', Cz', Autovdes)'
```

```
Lz =
```

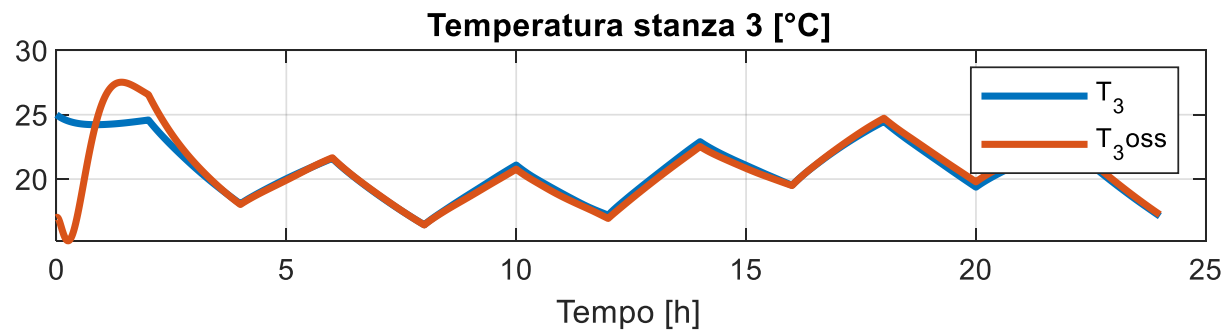
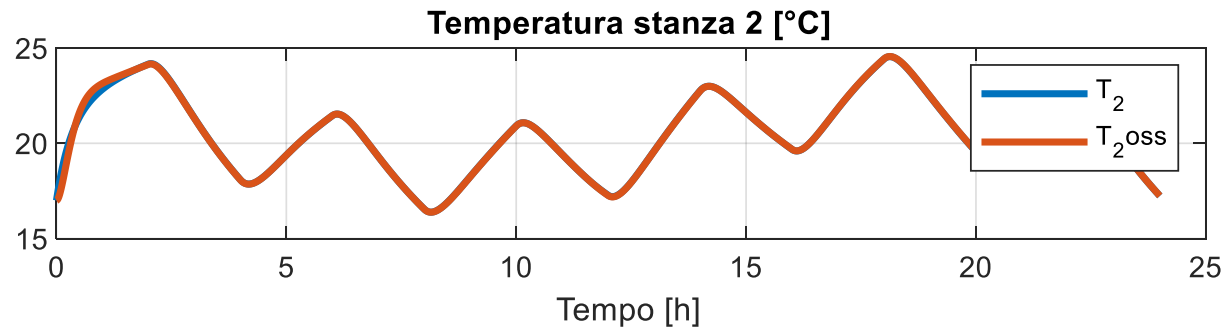
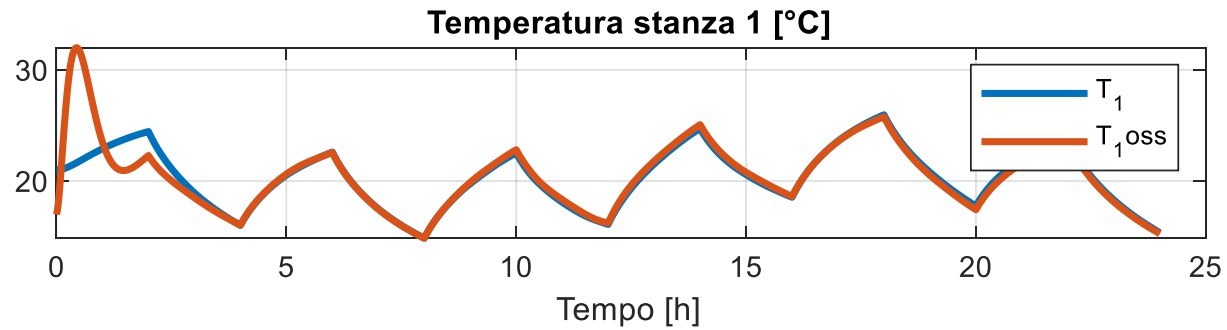
```
1.0e+02 *  
  
0.606250000000121  
0.093333333333340  
-0.247916666666745  
1.350000000000251
```

## Edificio\_LuenbergerStimaTamb.slx

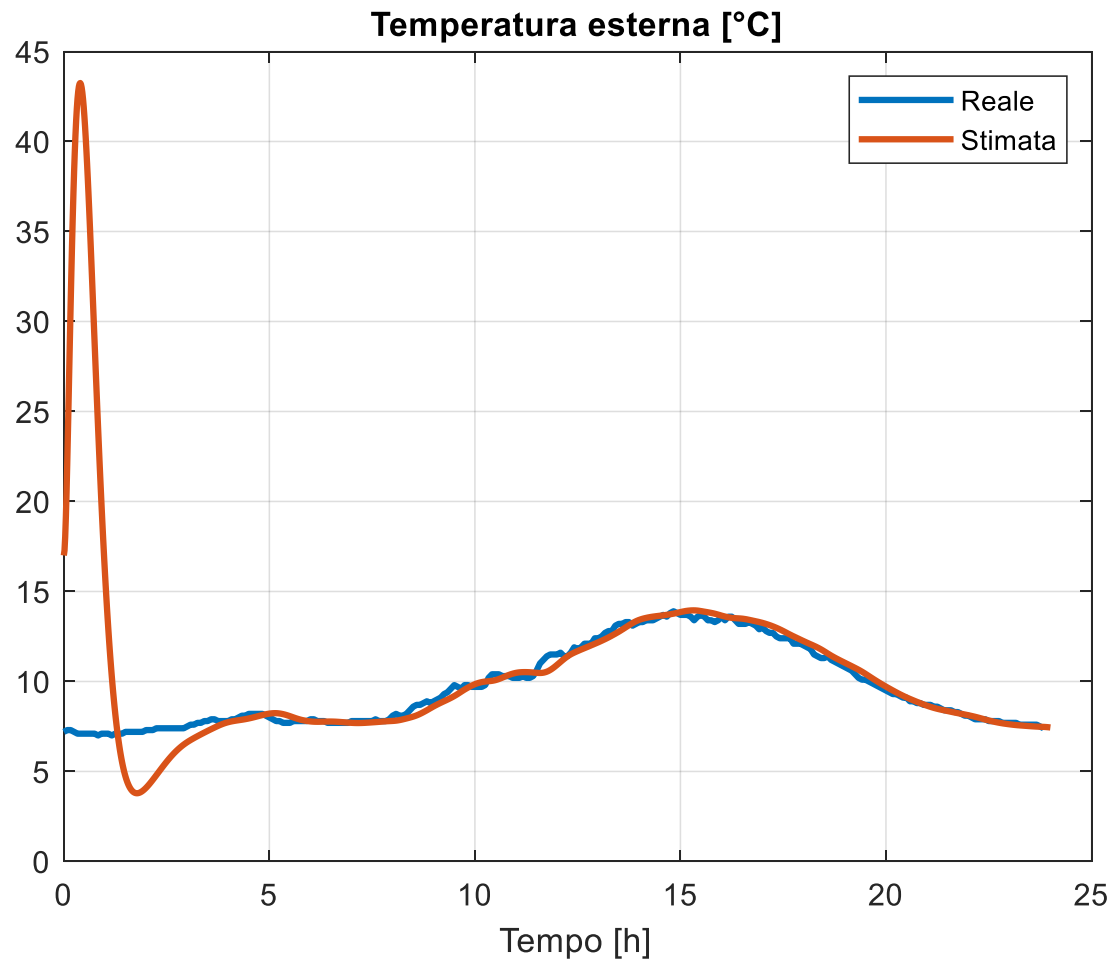
Ora l'osservatore riceve in ingresso unicamente la misura della temperatura  $T_2$  ed il segnale di comando dell'unità di riscaldamento



## Risultati



# Risultati



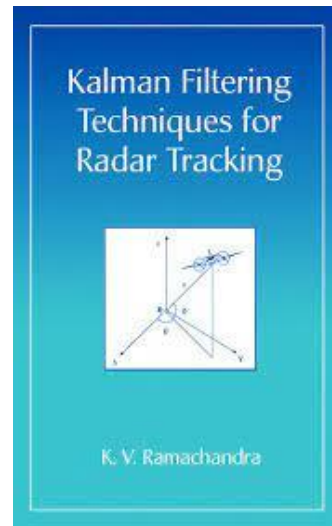
# Il Filtro di Kalman (KF)

Il filtro di Kalman è uno dei risultati della teoria del controllo che ha incontrato la maggiore varietà di applicazioni nei più disparati settori ingegneristici e non solo.

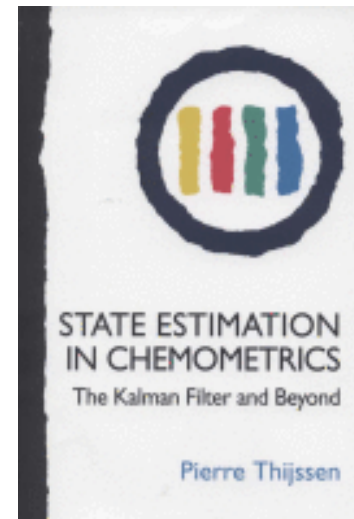
Finanza



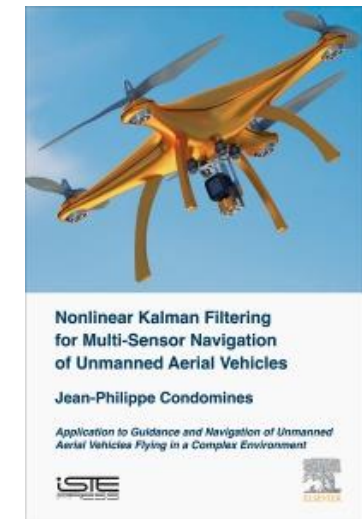
TLC



Chemiometria



Robotica mobile



E' a tutti gli effetti un osservatore di stato, ma la sua struttura ed il principio teorico che sta alla base della sua derivazione lo rendono particolarmente efficace e in grado di operare in maniera ottima o sub-ottima in relazione a modelli matematici affetti da **incertezze**, segnali misurati affetti da **rumore**, **nonlinearità** (nella equazione di stato e nella trasformazione in uscita) ed altre situazioni di grande interesse pratico come la disponibilità di **misure intermittenti**

E' formulato con riferimento ad un modello di processo di natura **stocastica**, in cui si ipotizza che in ciascuna equazione di stato intervenga un segnale addittivo gaussiano a media nulla che chiameremo "rumore di modello". Contestualmente si ipotizza anche che le misure siano corrotte da un rumore gaussiano a media nulla.

Sebbene siano disponibili le versioni a tempo continuo e a tempo discreto, presentiamo unicamente la versione a tempo discreto che nella pratica risulta largamente piu utilizzata.

E' un particolare osservatore in cui la matrice dei guadagni viene variata in linea ad ogni passo di campionamento in modo da realizzare un bilanciamento ottimale fra la affidabilità del modello matematico di cui si dispone e la accuratezza delle misura acquisite. Esso risulta pertanto in grado di produrre delle **stime ottime da un punto di vista statistico** (la stima prodotta dal Filtro di Kalman minimizza la somma delle varianze degli errori di stima).

## KF - Modello del processo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \quad w_i(k) \sim N(0, Q_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k) \quad v_i(k) \sim N(0, R_i) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

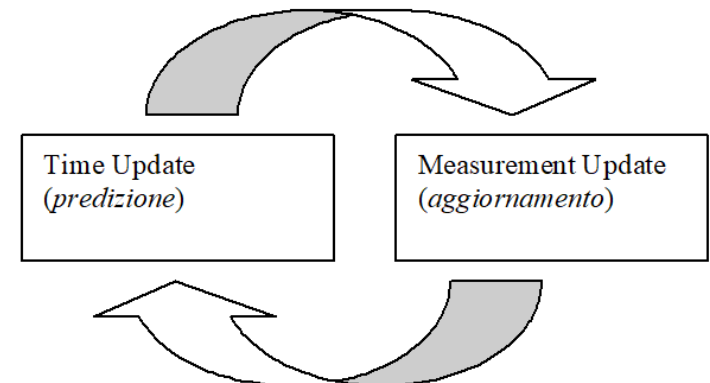
$w(k)$ ,  $v(k)$  sono processi stocastici Gaussiani stazionari scorrelati a media nulla con matrici di covarianza

$$Q = \text{diag}(Q_i) \quad R = \text{diag}(R_i)$$

Il filtro di Kalman implementa una **architettura ricorsiva** che prevede la ripetuta esecuzione di due passi:

**Predizione** (o stima a priori) effettuata sulla base della equazione di stato «proiettando in avanti» la stima corrente

**Aggiornamento** (o stima a posteriori) effettuata sulla base delle misure acquisite modificando in modo opportuno la stima a priori



## Equazioni del Filtro di Kalman

### *Inizializzazione*

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad P(0) = P_0 > 0 \quad k = 1$$

### *Predizione (time update)*

$$\hat{x}^-(k) = A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1)$$

$$P^-(k) = AP(k-1)A^T + Q$$

stima a priori

### *Aggiornamento (measurement update)*

$$L(k) = P^-(k)C^T[CP^-(k)C^T + R]^{-1}$$

$$P(k) = [I - L(k)C] P^-(k)$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + L(k)[y(k) - C\hat{x}^-(k)]$$

stima a posteriori

*Stima dello stato*

$$k = k + 1$$

## Commenti

Se ricordiamo come nel progetto dell'osservatore di Luenberger si dovesse ricercare un non facile compromesso fra la rapidità di convergenza del filtro (gli autovalori di  $A-LC$ ) e la sensitività dell'osservatore ai rumori, il KF offre in tal senso un compromesso ottimale

La determinazione concreta delle varianze  $Q_i$  ed  $R_i$  ha un certo grado di incertezza.  $R_i$  può essere stimata mediante test sperimentali (lettura dei segnali misurati in condizioni stazionarie) mentre  $Q_i$  può essere considerato in qualche misura un parametro di taratura per mezzo del quale governare le proprietà del filtro.

$P_0$  si sceglie tipicamente come una matrice diagonale (di elementi positivi). Anche  $P_0$  può essere considerato un parametro di taratura per mezzo del quale governare le proprietà di convergenza del filtro.

Applichiamo il filtro di Kalman al problema della stima delle temperatura dell'edificio.

## Determinazione delle matrici del modello a tempo discreto

Già determinate in precedenza

```
Tcd=1/60; %periodo di campionamento: 1 minuto
```

```
sistemaTC=ss(A,B,C,D);
sistemaTD=c2d(sistemaTC,Tcd)
[Ad Bd Cd Dd]=ssdata(sistemaTD)
```

```
Ad =
    0.978172695903651    0.013434870904240    0.000150380887458
    0.021495793446784    0.956752092900596    0.021616098156750
    0.000075190443729    0.006755030673984    0.989025859248263

Bd =
    0.008242052304652    0.164841046093036
    0.000136015495871    0.002720309917411
    0.004143919634024    0.082878392680476

Cd =
     0     1     0

Dd =
     0     0
```

$$\begin{bmatrix} T_1(k+1) \\ T_2(k+1) \\ T_3(k+1) \end{bmatrix} = A_d \begin{bmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ T_3(k) \end{bmatrix} + B_d \begin{bmatrix} T_\infty(k) \\ s(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \\ w_3(k) \end{bmatrix}$$

$$w_i(k) \sim N(0, Q_i)$$

$$y(k) = T_2(k) + v(k) = C_d \begin{bmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ T_3(k) \end{bmatrix} + v(k)$$

$$v(k) \sim N(0, R)$$

## Parametri

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0.5$$

Varianze dei «rumori di modello»

$$R = 0.005$$

Varianza del rumore di misura (stesso valore usato nel precedente test con l'osservatore di Luenberger)

Medesimi profili per  $T_\infty(k)$  e  $s(k)$  utilizzati in precedenza

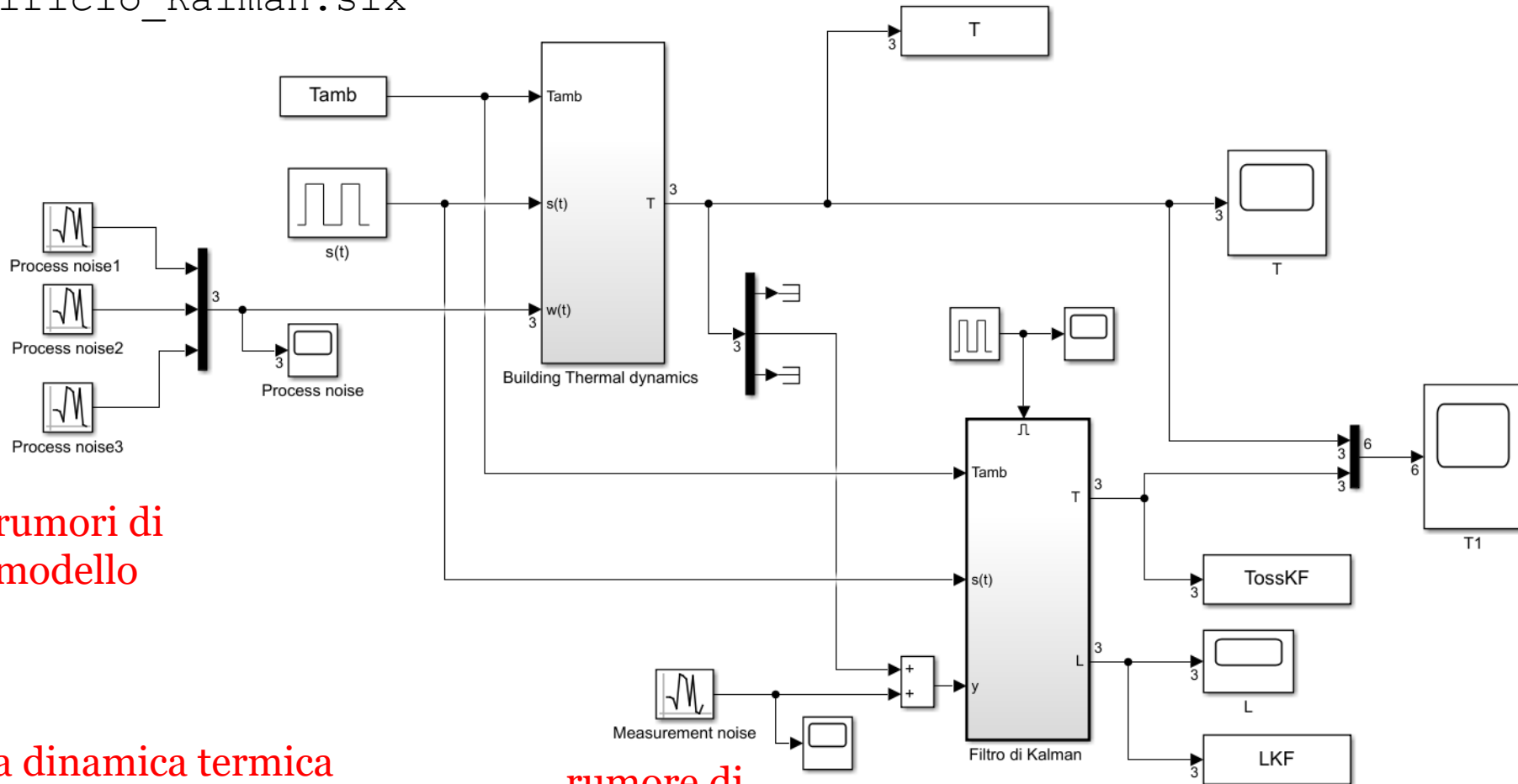
$$P_0 = I \quad \text{Matrice identità}$$

$$\hat{x}_0 = [17 \quad 17 \quad 17] \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T(0) = [21 \quad 22 \quad 25] \text{ } ^\circ\text{C}$$

**Script:** `TemperatureEstimation3zonescriptKalman.m`

## Edificio\_Kalman.slx



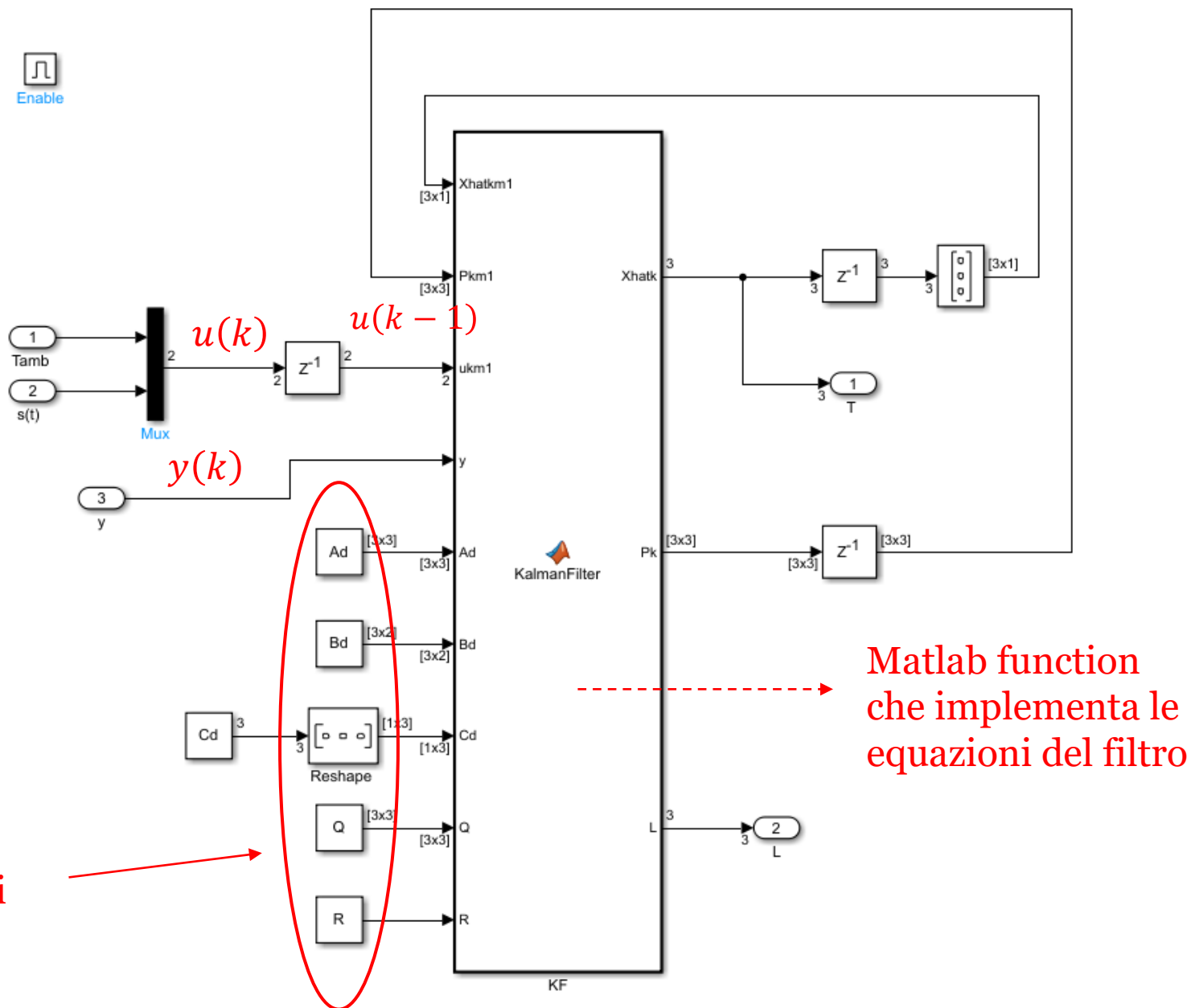
rumori di  
modello

La dinamica termica  
dell'edificio è simulata con  
passo di campionamento  
di 1 secondo

rumore di  
misura

Il KF è implementato mediante  
un Subsystem che si «attiva»  
ogni  $T_{cd}$  (ogni minuto)

# Interno del Subsystem «Filtro di Kalman»



## Corpo della funzione

```
function [Xhatk,Pk,L] = KalmanFilter(Xhatkml,Pkml,ukml,y,Ad,Bd,Cd,Q,R)
```

```
Xhatm=Ad*Xhatkml+Bd*ukml;
```

$$\hat{x}^-(k) = A_d \hat{x}(k-1) + B_d u(k-1)$$

```
Pmk=Ad*Pkm1*Ad'+Q;
```

$$P^-(k) = A_d P(k-1) A_d^T + Q$$

```
L=Pmk*(Cd')*inv(Cd*Pmk*(Cd')+R);
```

$$L(k) = P^-(k) C_d^T [C_d P^-(k) C_d^T + R]^{-1}$$

```
Xhatk=Xhatm+L*(y-Cd*Xhatm);
```

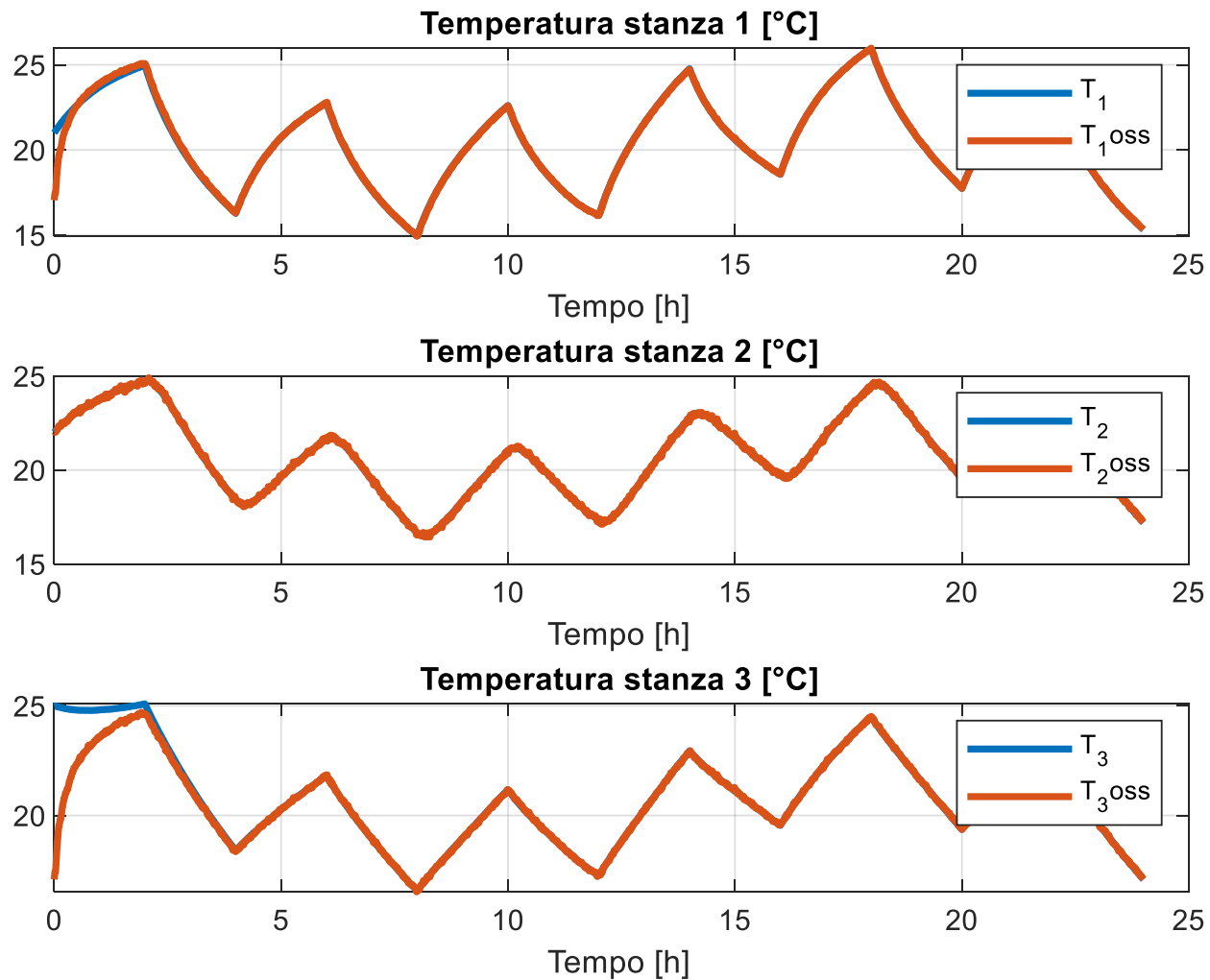
$$\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + L(k)[y(k) - C_d \hat{x}^-(k)]$$

```
Pk=(eye(3)-L*Cd)*Pmk;
```

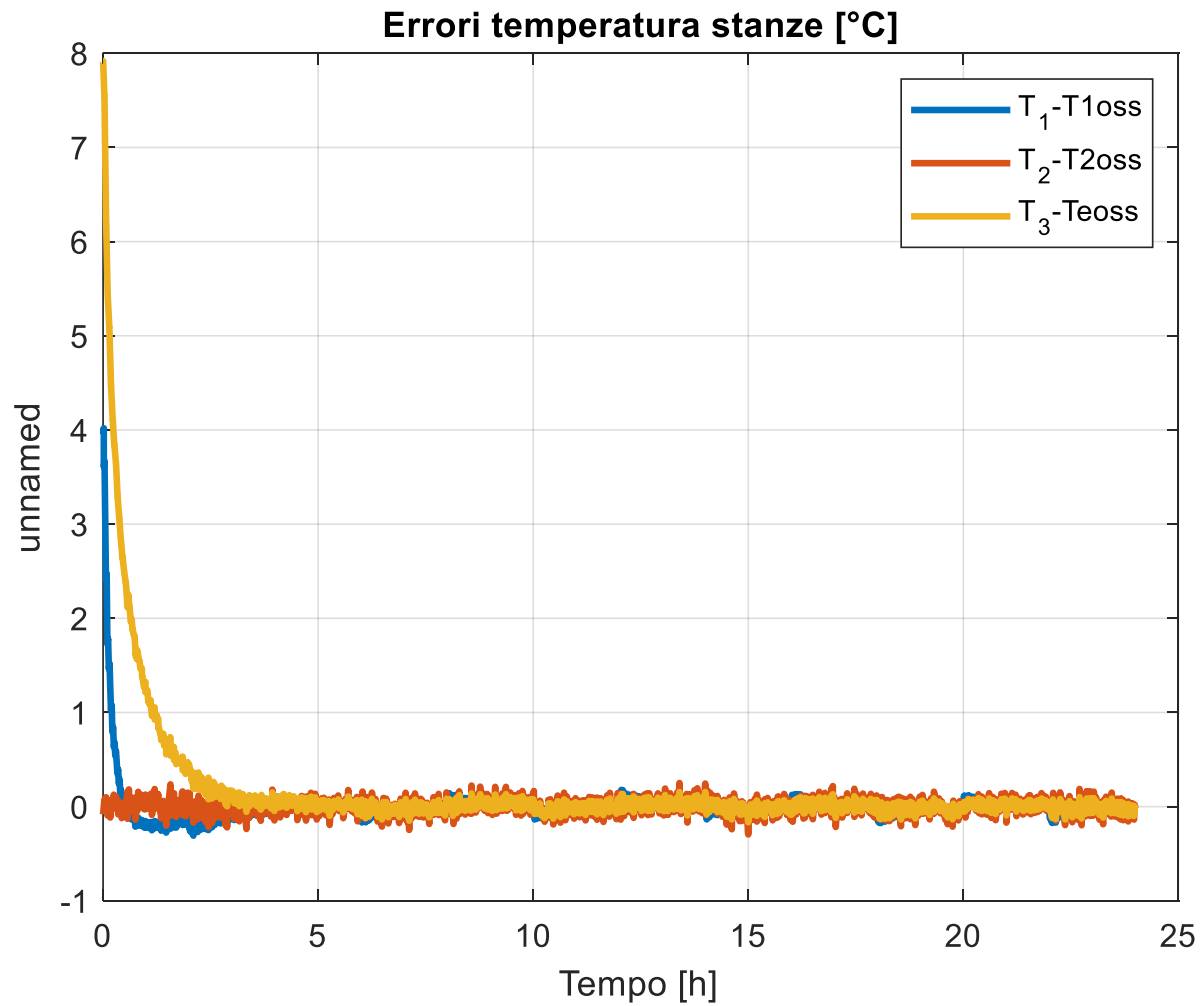
$$P(k) = [I - L(k) C_d] P^-(k)$$

# Risultati

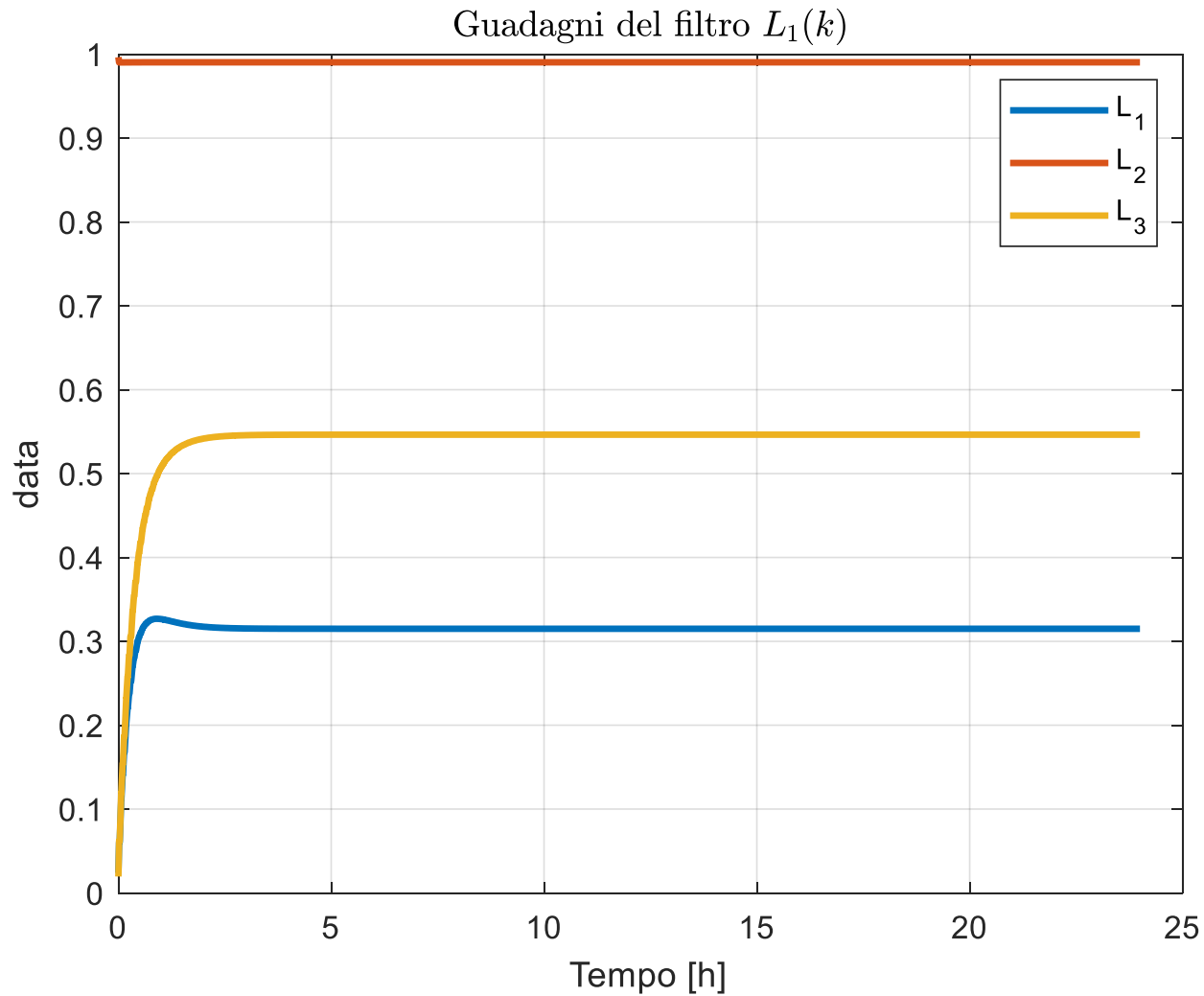
## Confronto fra le temperature reali e osservate



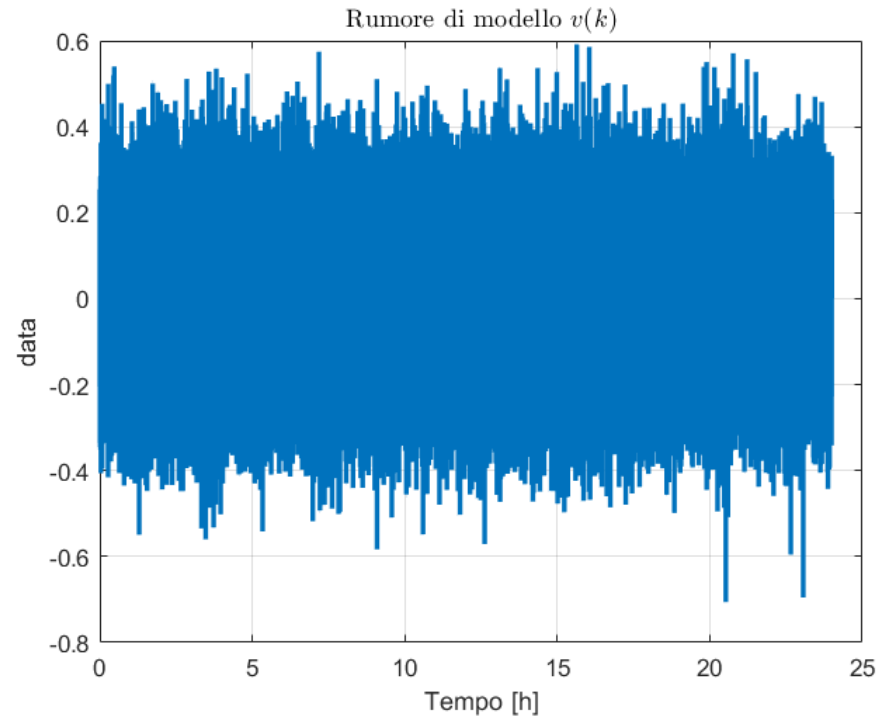
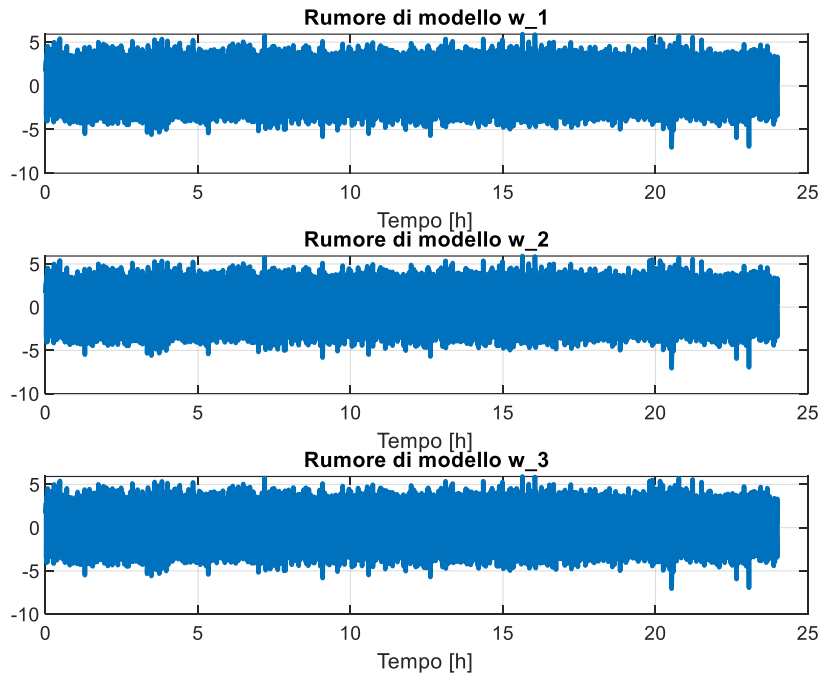
## Differenze fra le temperature reali e osservate



# Guadagni $L(k)$



## Rumori di misura e di modello.



## Stima di disturbi mediante filtro di Kalman

Mediante un approccio sostanzialmente identico a quello seguito in precedenza, anche il filtro di Kalman può essere impiegato per stimare, in aggiunta alle variabili di stato, uno o più disturbi non misurabili.

E' sufficiente progettare il filtro con riferimento al processo in cui il vettore di stato viene «aumentato» mediante l'aggiunta dei disturbi non misurabili  $d_{nm}(k)$  fra le variabili di stato e l'impiego, come relativo modello di funzionamento, di una equazione che ne stabilisce (al netto del termine additivo gaussiano) una evoluzione temporale **costante**:

$$d_{nm}(k + 1) = d_{nm}(k) + w_d(k) \quad w_d(k) \sim N(0, Q_d)$$

Se il sistema di ordine aumentato soddisfa la proprietà di osservabilità, si può implementare il filtro che consente la stima simultanea delle variabili di stato e dei disturbi non misurabili.

Con riferimento alla dinamica termica dell'edificio, tale sistema aumentato diventa il seguente:

$$z(k) = \begin{bmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ T_3(k) \\ T_\infty(k) \end{bmatrix} \quad \text{Vettore di stato «aumentato»}$$

Il disturbo non misurabile viene modellato mediante una equazione di stato del tipo

$$T_\infty(k+1) = T_\infty(k) + w_4(k) \quad w_4(k) \sim N(0, Q_4)$$

Componendo assieme tali relazioni con le equazioni del modello originario si ottiene pertanto una equazione di stato complessiva:

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} A_d & B_d^1 \\ \mathbf{0}_{1,3} & 1 \end{bmatrix} z(k) + B_d^2 s(k) + w(k) \quad \mathbf{0}_{1,3} = [0 \ 0 \ 0]$$

$$w_i(k) \sim N(0, Q_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

in cui  $B_d^1$  e  $B_d^2$  rappresentano rispettivamente la prima e la seconda colonna della matrice  $B_d$ .

Anche la trasformazione in uscita cambia lievemente. Deve essere aggiunto un elemento nullo al vettore  $C_d$  per tenere conto del fatto che il vettore di stato ha ora dimensione 4.

$$y(k) = T_2(k) + v(k) = \bar{C}_d \begin{bmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ T_3(k) \\ T_\infty(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad \bar{C}_d = [C_d \ 0] = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$v(k) \sim N(0, R)$$

## Modello compressivo:

$$z(k+1) = \bar{A}_d z(k) + \bar{B}_d^2 s(k) + w(k)$$

$$y(k) = \bar{C}_d z(k) + v(k)$$

$$\bar{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & B_d^1 \\ \mathbf{0}_{1,3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_d = B_d^2$$

$$\bar{C}_d = [C_d \ 0] = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ T_3(k) \\ T_\infty(k) \end{bmatrix}$$

L'implementazione è lasciata come esercizio allo studente.

**[Files]** TemperatureEstimation3zonescriptKalman\_stimadisturbo.m  
Edificio\_KalmanStimaDisturbo.slx

## Il Filtro di Kalman esteso (EKF)

Il filtro di Kalman esteso è una generalizzazione del filtro di Kalman pensata per un processo descritto attraverso un **modello matematico non lineare**.

### EKF - Modello del processo

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k) \quad w_i(k) \sim N(0, Q_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y(k) = h(x(k)) + v(k) \quad v_i(k) \sim N(0, R_i) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$w(k), v(k)$  sono processi stocastici Gaussiani stazionari scorrelati a media nulla con matrici di covarianza

$$Q = \text{diag}(Q_i) \quad R = \text{diag}(R_i)$$

$f(x(k), u(k))$  ed  $h(x(k))$  sono dei vettori colonna di dimensione opportuna che contengono funzioni **non lineari** dei propri argomenti di ingresso.

Il filtro di Kalman esteso implementa, in buona sostanza, il filtro di Kalman tradizionale con riferimento al processo **linearizzato** intorno alla stima corrente dello stato ed al valore corrente dell'ingresso.

Si definiscano le matrici

$$A(x(k), u(k)) = \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x}$$

$$C(x(k)) = \frac{\partial h(x(k))}{\partial x}$$

NB Se il processo originario è lineare, tali matrici coincidono con le matrici «classiche» costanti A e C

## Equazioni del Filtro di Kalman esteso

### *Inizializzazione*

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad P(0) = P_0 > 0 \quad k = 1$$

### *Predizione (time update)*

$$\hat{x}^-(k) = f(\hat{x}(k-1), u(k-1))$$

$$P^-(k) = A(\hat{x}(k), u(k))P(k-1)A^T(\hat{x}(k), u(k)) + Q$$

### *Aggiornamento (measurement update)*

$$L(k) = P^-(k)C(\hat{x}(k-1))[C(\hat{x}(k-1))P^-(k)C^T(\hat{x}(k-1)) + R]^{-1}$$

$$P(k) = [I - L(k)C(\hat{x}(k-1))] P^-(k)$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + L(k)[y(k) - h(\hat{x}^-(k))] \quad \textit{Stima dello stato}$$

$$k = k + 1$$

## Verifica della osservabilità

Premettiamo intanto che il filtro di Kalman esteso **non garantisce** nessun tipo di proprietà di convergenza. Ciò per effetto della procedura di linearizzazione su cui si basa.

La verifica di osservabilità non può più essere eseguita attraverso la verifica del rango della matrice di osservabilità, in quando la matrice di osservabilità dipende ora sia dallo stato che dall'ingresso

$$M_o(x(k), u(k)) = \begin{bmatrix} C(x(k)) \\ C(x(k)) A(x(k), u(k)) \\ C(x(k)) A^2(x(k), u(k)) \\ \vdots \\ C(x(k)) A^{n-1}(x(k), u(k)) \end{bmatrix}$$

Cio che si dovrebbe idealmente fare è verificare che la matrice di osservabilità sia a rango pieno in corrispondenza di tutti i possibili valori di  $x(k)$  ed  $u(k)$ . Ciò che si può concretamente fare è verificare che la matrice di osservabilità sia a rango pieno in corrispondenza di vari punti di lavoro di interesse.

## Esempio di applicazione

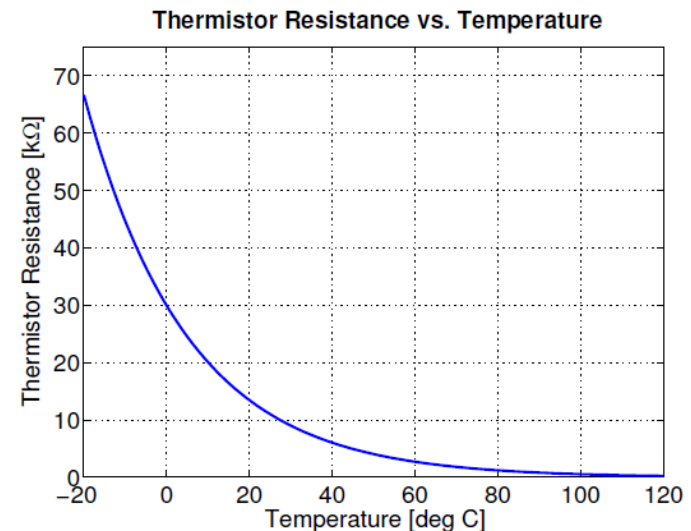
Implementiamo e testiamo le proprietà di convergenza del Filtro di Kalman esteso prendendo sempre spunto dalla dinamica termica dell'edificio.

Ipotizziamo che la temperatura  $T_2$  sia trasdotta mediante un **termistore**.

Un termistore è un elemento composto da materiali semiconduttori la cui resistenza varia in maniera predicibile e ripetitiva con la temperatura del mezzo in cui è immerso.

Un termistore NTC (Negative Temperature Coefficient) presenta una curva di dipendenza non lineare assimilabile a quella mostrata sulla destra, che può essere ben approssimata mediante una curva esponenziale

$$R(T) = e^{-\alpha T + \beta} \quad \begin{array}{l} \alpha = 0.04 \\ \beta = 3.4 \end{array}$$



Se misuriamo il valore corrente della resistenza (ad esempio attraverso un ponte di Wheatstone) si ottiene una misura di temperatura che transita attraverso una caratteristica non lineare

Ipotizziamo di utilizzare come segnale di misura la resistenza  $R = R(T)$  e ricaviamo il relativo modello a tempo discreto associato. Le equazioni di stato restano invariate, e cambia unicamente la trasformazione in uscita.

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) + w(k)$$

$$y(k) = e^{-0.04 x_2(k)+3.4} + v(k)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ T_3(k) \end{bmatrix} \quad u(k) = \begin{bmatrix} T_\infty(k) \\ s(k) \end{bmatrix}$$

$$f(x(k), u(k)) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad \text{Equazione di stato}$$

$$h(x(k)) = e^{-0.04 x_2(k)+3.4} \quad \text{Trasformazione in uscita (caratteristica del sensore di misura)}$$

Matrici A e C (funzioni non lineari dello stato):

$$A(x(k), u(k)) = \frac{\partial f(x(k), u(k))}{\partial x} = A_d$$

$$C(x(k)) = \frac{\partial h(x(k))}{\partial x} = [0 \quad -0.04e^{-0.04 x_2(k)+3.4} \quad 0]$$

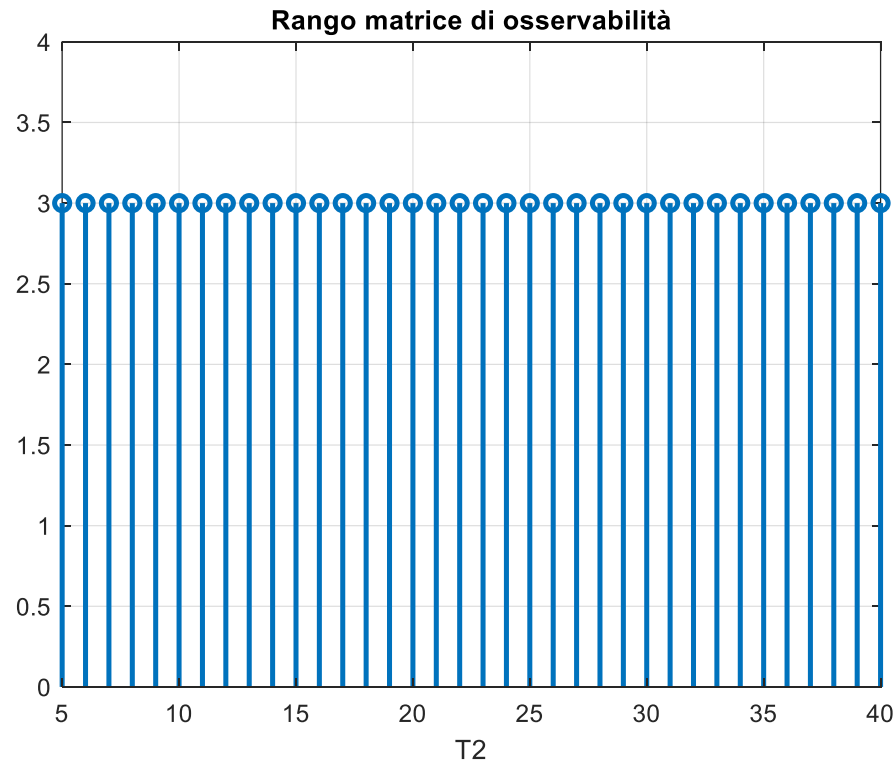
## Verifica della osservabilità

La matrice di osservabilità dipende unicamente dalla seconda variabile di stato.

$$M_o(x_2) = \begin{bmatrix} C(x_2) \\ C(x_2) A_d \\ C(x_2) A_d^2 \end{bmatrix}$$

Possiamo valutarne il rango in corrispondenza di diversi valori di  $x_2$

Il responso è positivo:  
facendo variare  $x_2$  da 5 a 40  
con incrementi unitari il  
rango è sempre pieno



## Parametri

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0.5$$

Varianze dei «rumori di modello»

$$R = 0.005$$

Varianza del rumore di misura (stesso valore usato nel precedente test con l'osservatore di Luenberger)

Medesimi profili per  $T_\infty(k)$  e  $s(k)$  utilizzati in precedenza

$$P_0 = I \quad \text{Matrice identità}$$

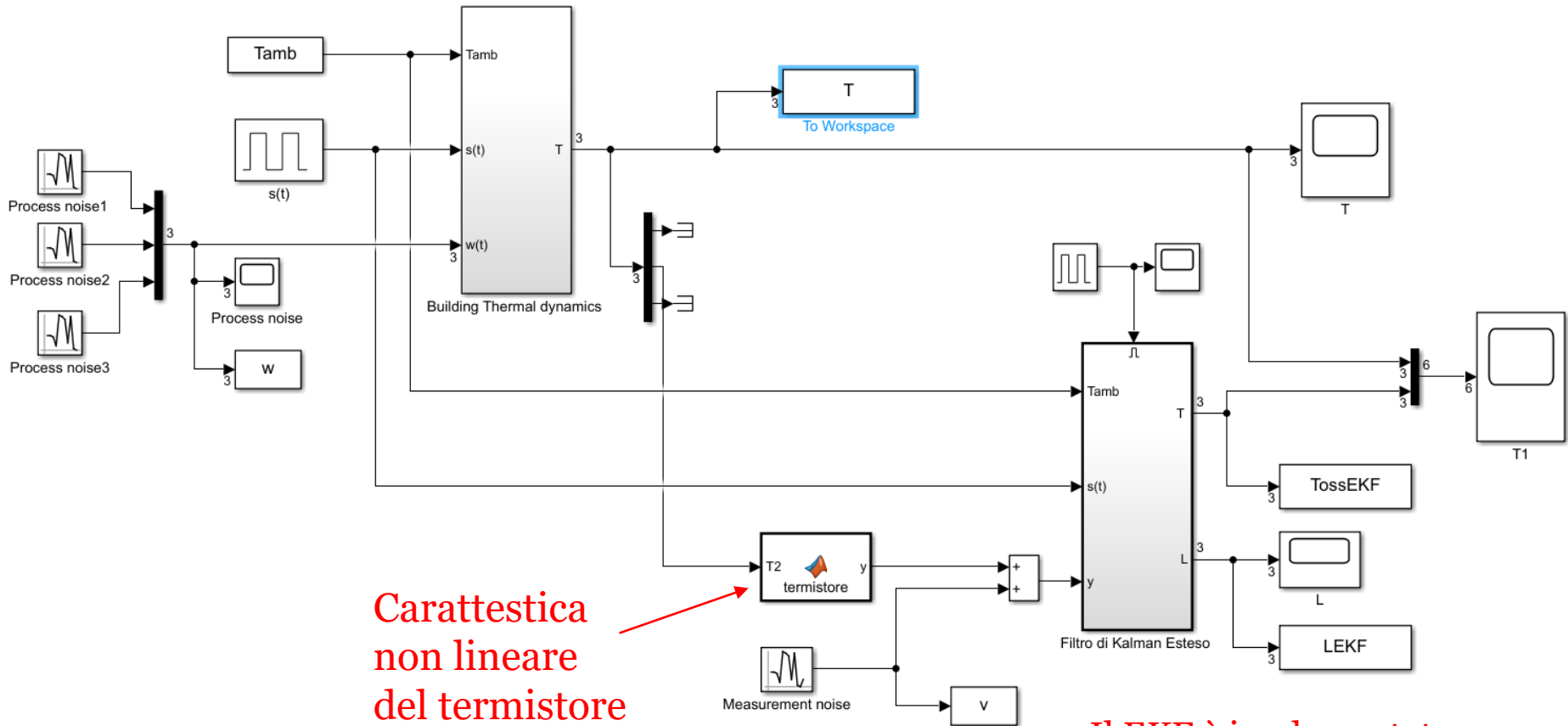
$$\hat{x}_0 = [17 \quad 17 \quad 17] \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T(0) = [21 \quad 22 \quad 25] \text{ } ^\circ\text{C}$$

**Script:** `TemperatureEstimation3zonescriptKalmanEsteso.m`

Edificio\_KalmanEsteso.slx

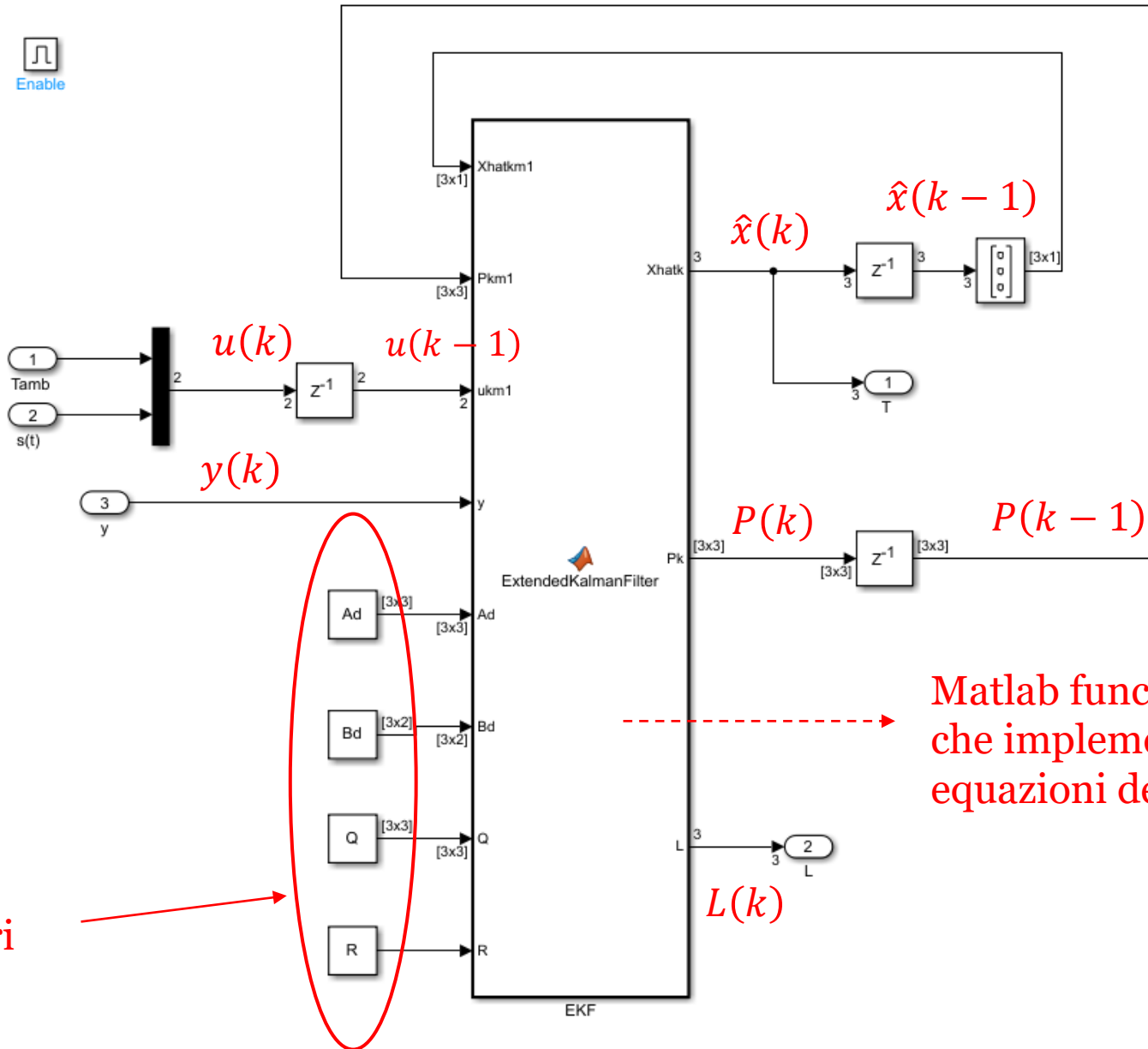
La dinamica termica dell'edificio è simulata con passo di campionamento di 1 secondo



Carattistica  
non lineare  
del termistore

Il EKF è implementato  
mediante un Subsystem che  
si «attiva» ogni minuto

# Interno del Subsystem «Filtro di Kalman Estes»



Parametri costanti

Matlab function che implementa le equazioni del filtro

## Corpo della Matlab Function

```
function [Xhatk,Pk,L] = ExtendedKalmanFilter (Xhatkm1,Pkm1,ukm1,y,Ad,Bd,Q,R)
```

```
alfa=0.04;
```

```
beta=3.4;
```

```
C=@(T2) [0 -alfa*exp(-alfa*T2+beta) 0];
```

```
h=@(T2) exp(-alfa*T2+beta);
```

```
%time update
```

```
Xhatm=Ad*Xhatkm1+Bd*ukm1;
```

```
Pmk=Ad*Pkm1*Ad'+Q;
```

```
%measurement update
```

```
Cd=C(Xhatkm1(2));
```

```
L=Pmk*(Cd')*inv(Cd*Pmk*(Cd')+R);
```

```
Pk=(eye(3)-L*Cd)*Pmk;
```

```
Xhatk=Xhatm+L*(y-h(Xhatm(2)));
```

**Anonymous functions per il calcolo della matrice  $C(T_2)$  e della caratteristica  $R=h(T_2)$  del sensore**

$$\hat{x}^-(k) = f(\hat{x}(k-1), u(k-1)) = A_d \hat{x}(k-1) + B_d \hat{u}(k-1)$$

$$P^-(k) = A(\hat{x}(k), u(k))P(k-1)A^T(\hat{x}(k), u(k)) + Q$$

**Calcolo della matrice  $C(\hat{x}(k-1))$**

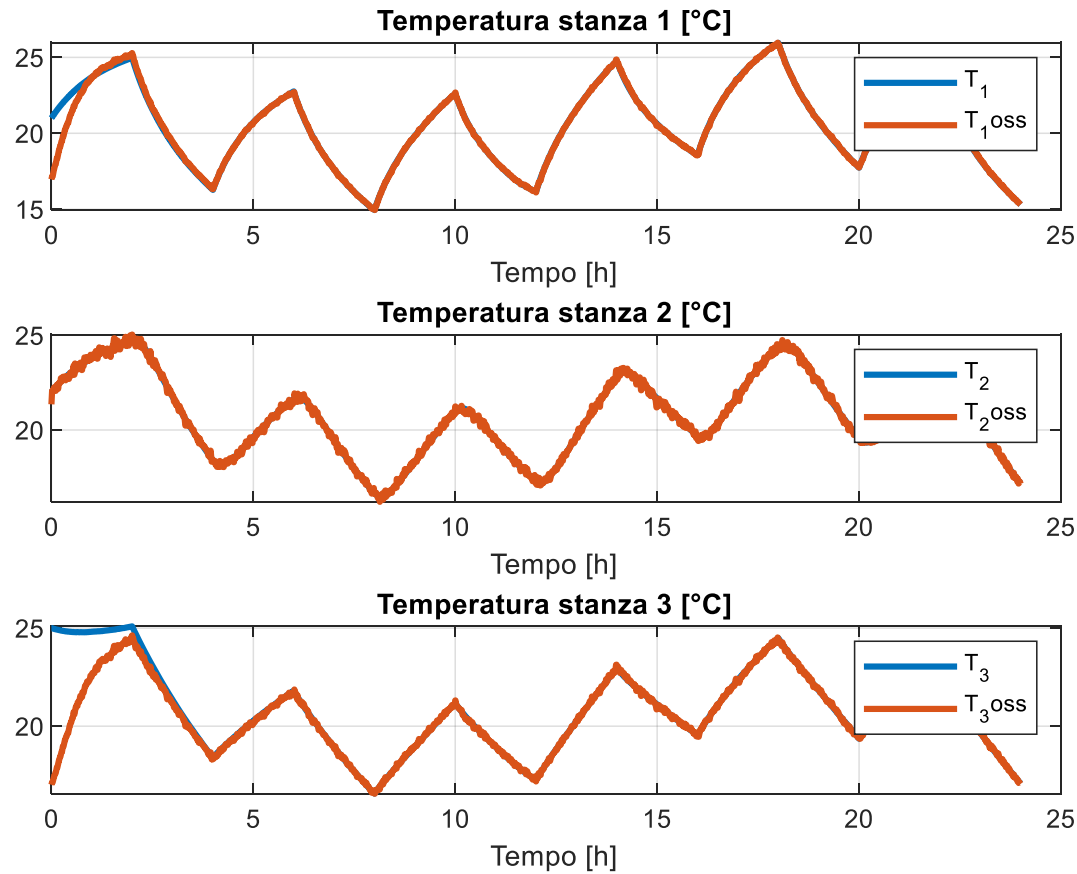
$$L(k) = P^-(k)C(\hat{x}(k-1))[C(\hat{x}(k-1))P^-(k)C^T(\hat{x}(k-1)) + R]^{-1}$$

$$P(k) = [I - L(k)C(\hat{x}(k-1))]P^-(k)$$

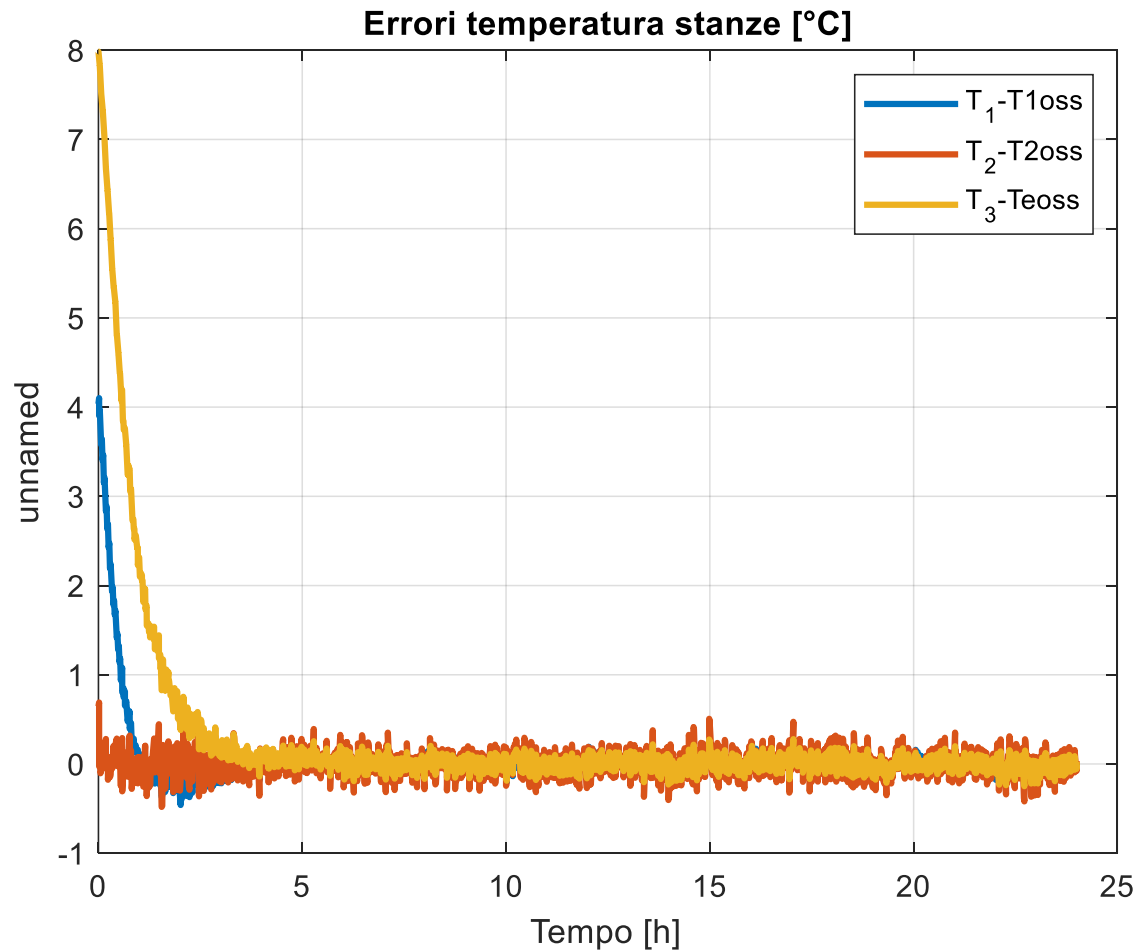
$$\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + L(k)[y(k) - h(\hat{x}^-(k))]$$

# Risultati

## Confronto fra le temperature reali e osservate

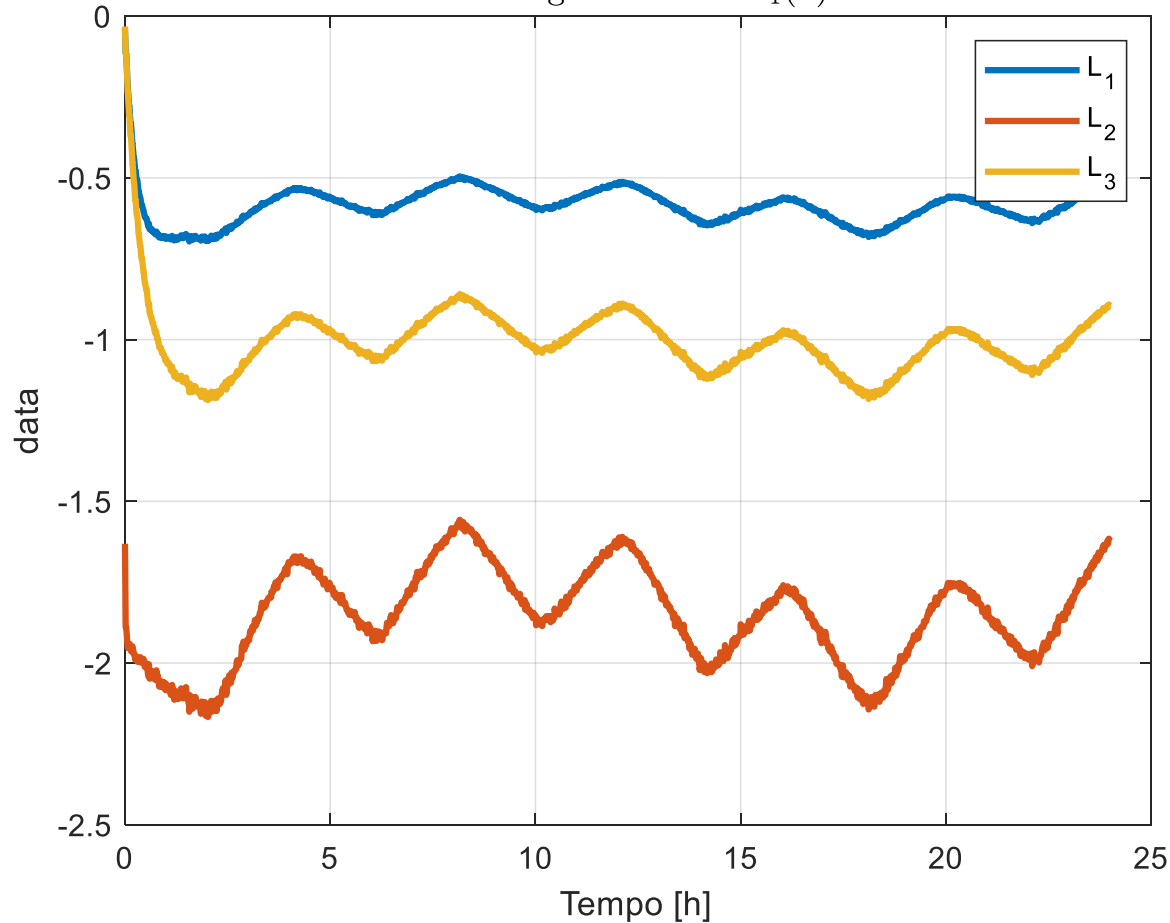


## Differenze fra le temperature reali e osservate



## Guadagni $L(k)$

Guadagni del filtro  $L_1(k)$



Non convergono più a valori costanti come osservato in precedenza nel caso lineare