6 Esercizi di Geometria e Algebra - Lista 6: Spazi Vettoriali

Vettori Linearmente Indipendenti e Basi:

Esercizio 6.1. Sia $\mathbb{R}^3$ l'usuale spazio vettoriale euclideo. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i tre vettori

$$e_1 =^t [1,0,0], \qquad e_2 =^t [0,1,0], \qquad e_3 =^t [0,0,1]$$

Verificare che $\mathbb{B} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Scrivere poi una decomposizione (rispetto a $\mathbb{B}$) del vettore $v =^t [2,1,0]$.

Qual è dunque la dimensione di $\mathbb{R}^3$*?*

Esercizio 6.2. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2, ossia

$$A \in M_2(\mathbb{R}) \iff A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Date le matrici

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

verificare che $\mathbb{B} = \{ B_1, B_2, B_3, B_4 \}$ è una base per $M_2(\mathbb{R})$, poi scrivere la decomposizione rispetto ad essa di

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Infine, trovare un'altra base $\mathbb{B}'$ per $M_2(\mathbb{R})$ diversa da $\mathbb{B}$. *Da quanti elementi sarà composta* $\mathbb{B}'$*?*

Esercizio 6.3. Sia $S_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici *simmetriche* di ordine 2, ossia

$$A \in S_2(\mathbb{R}) \iff A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Date le matrici

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

verificare che $\mathbb{B} = \{ E_1, E_2, E_3 \}$ è una base per $S_2(\mathbb{R})$, poi scrivere la decomposizione rispetto ad essa di

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Infine, dimostrare che $S_2(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Sottospazi Vettoriali:

Esercizio 6.4. Sia $r : \{x = 0\}$ l'asse y nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Mostrare che $r \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale e determinarne la dimensione.

(*Suggerimento:* ricorda che una base è formata da vettori linearmente indipendenti e che generano il sottospazio; per una retta, un suo generatore è un vettore direzione.)

Esercizio 6.5. Sia l la retta di $\mathbb{R}^3$ data in forma parametrica da

$$l : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$$

Mostrare che $l \subset \mathbb{R}^3$ è un sottospazio vettoriale e determinarne una base.

Esercizio 6.6. Sia Π il piano di $\mathbb{R}^3$ dato in forma cartesiana da

$$\Pi : \{x - 2y - z = 0\}$$

Mostrare che $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ è un sottospazio vettoriale e determinarne una base.

(*Suggerimento:* analogo a quello nell'Esercizio 6.4; quanti vettori generano però un piano?)

Sottospazi come soluzioni di Sistemi Lineari:

Esercizio 6.7. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

- Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.
- Determinare una base di V e calcolare $\dim(V)$.

Esercizio 6.8. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.
- Determinare una base di W e calcolare $\dim(W)$.