

Analisi matematica III - Anno accademico 2023/2024  
Laurea in Matematica

**Equazioni differenziali ordinarie**

**Esercizio I.** Determinare la soluzione  $y(x)$  dei seguenti problemi di Cauchy con equazione a variabili separabili.

1. 
$$\begin{cases} y' = x^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = e^{\frac{x^3}{3}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. 
$$\begin{cases} y' = x^2 y^2 - 4x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = -2 \tanh\left(\frac{2}{3}x^3\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. 
$$\begin{cases} y' = \frac{x^2 y}{1+x^3} \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \sqrt[3]{4(1+x^3)}, \quad x > 1.$$

4. 
$$\begin{cases} y' = \frac{x-1}{y+1} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = -x, \quad x < 1.$$

5. 
$$\begin{cases} y' = (1-y^2) \operatorname{sen}^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \tanh\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. 
$$\begin{cases} y' = \frac{2xy}{x^2-1} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = 0, \quad -1 < x < 1.$$

7. 
$$\begin{cases} y' = (1+x^2)|y|^\alpha, \quad \alpha > 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. 
$$\begin{cases} y' = \frac{e^x}{(1+e^x)y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \sqrt{1 + 2 \ln \frac{1+e^x}{2}}, \quad 1 + 2 \ln \frac{1+e^x}{2} > 0.$$

9. 
$$\begin{cases} y' = y^2 + 3y - 4 \\ y(2) = 0 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \frac{4 - 4e^{-10}e^{5x}}{4 + e^{-10}e^{5x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio II.** Determinare la soluzione  $y(x)$  dei seguenti problemi di Cauchy con equazione omogenea o riconducibile a omogenea.

$$1. \begin{cases} y' = \frac{x-y}{x+y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = -x + \sqrt{2(x^2+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$2. \begin{cases} y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = -x \ln\left(\ln \frac{e}{x}\right), \quad x \in (0, e)$$

$$3. \begin{cases} y' = -\frac{x+y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \frac{3-x^2}{2x}, \quad x > 0$$

$$4. \begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \quad x > 0, y \geq 0 \\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \frac{(7+4\sqrt{3})x^2-1}{2(2+\sqrt{3})}, \quad x > 0$$

$$5. \begin{cases} y' = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6} \\ y(2) = 2 \end{cases} \quad \text{Sol. definita implicitamente: } (4y-x-3)(2x+y-3)^2 = 27$$

$$6. \begin{cases} y' = \frac{7x-3y-7}{7y-3x+3} \\ y(2) = 2 \end{cases} \quad \text{Sol. definita implicitamente: } (y-x+1)^2(y+x-1)^5 = 243$$

$$7. \begin{cases} y' = -\frac{x+y+1}{2x+2y+1} \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad \text{Sol. definita implicitamente: } x+2y+\ln(x+y) = 5+\ln 3$$

**Esercizio III.** Determinare la soluzione  $y(x)$  dei seguenti problemi di Cauchy con equazione esatta o riconducibile a esatta.

$$1. \begin{cases} y' = -\frac{x+y \cos x}{\sin x} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \frac{8+\pi^2-4x^2}{8 \sin x}, \quad x \in (0, \pi)$$

$$2. \begin{cases} y' = -\frac{6x+y^2}{2xy+1} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \frac{-1+\sqrt{1+20x-12x^3}}{2x}, \quad 1+20x-12x^3 > 0$$

$$3. \begin{cases} y' = -\frac{3ye^{3x}-2x}{e^{3x}} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = e^{-3x}(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$4. \begin{cases} y' = -\frac{y(x + e^{\frac{x}{y}})}{e^{\frac{x}{y}}(y - x)} \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \text{Sol. definita implicitamente: } 2y e^{\frac{x}{y}} + x^2 = 4.$$

$$5. \begin{cases} y' = -\frac{3xy^2 + 2}{2x^2y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \sqrt{\frac{2-x^2}{x^3}}, \quad x \in (0, \sqrt{2})$$

$$6. \begin{cases} xy' = x^3 + y + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$7. \begin{cases} y' = \frac{3x^4 + 4x^3 + y}{x + 1} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = x^4 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$8. \begin{cases} y' = \frac{1 + xy}{1 - x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Sol. } y(x) = \frac{\arcsin x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

**Esercizio IV.** Determinare la soluzione generale (o la soluzione precisa)  $y(x)$  delle seguenti equazioni differenziali (o problemi de Cauchy) lineari del primo ordine.

$$1. y' - 2y = 1$$

$$2. y' + 2xy = x$$

$$3. y' + e^x y = 3e^x$$

$$4. y' - \frac{4y}{x} = x^4, \quad x > 0$$

$$5. \begin{cases} y' + |x|y = |x| \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x \sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio V.** Determinare la soluzione generale (o la soluzione precisa)  $y(x)$  delle seguenti equazioni differenziali (o problemi de Cauchy) riconducibili a equazioni del primo ordine.

$$1. y''' - 5y'' = 0$$

$$2. \begin{cases} y^{(4)} - xy''' = 3x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 2 \\ y'''(0) = -3 \end{cases}$$

**Esercizio VI.** Determinare la soluzione generale (o la soluzione precisa)  $y(x)$  delle seguenti equazioni differenziali (o problemi de Cauchy) lineari a coefficienti costanti.

1.  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

2.  $y^{(4)} + y = 0$

3.  $y'' + y' + y = 0$

4.  $y'' + 2y' + y = 0$

5.  $y'' - 2y' = 0$

6.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$$7. \begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

8.  $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$

9.  $y'' - 2y' + y = x e^x$

10.  $y'' - y = \text{sen}^2 x$

$$11. \begin{cases} y'' - 2y = \text{sen} x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \\ y(1) = e \\ y'(1) = 4e \end{cases}$$

**Esercizio VII.** Determinare la soluzione generale  $y(x)$  delle seguenti equazioni differenziali di Eulero:

1.  $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{6}{x^2}y = 0$

2.  $y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{2x^2}y = 0$

3.  $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = x$

**Esercizio VIII.** Sapendo che una funzione del tipo  $x \rightarrow e^{mx}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , è soluzione dell'equazione omogenea associata, trovare la soluzione generale dell'equazione non omogenea

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x}$$

definita per  $x \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio IX.** Un coltivo batteriano ha inizialmente una quantità  $N_0$  di batteri. Al tempo  $t = 1$  ora, il numero di batteri presenti è di  $\frac{3}{2}N_0$ . Se la velocità di riproduzione è proporzionale al numero di batteri presenti, determinare il tempo necessario affinché il numero di batteri triplichi.

**Esercizio X.** Sapendo che il tempo di dimezzamento radioattivo del Carbono 14 (C-14) è di circa 5600 anni, determinare l'età di un fossile che contiene  $\frac{1}{1000}$  della quantità originale di C-14. Nota: la velocità di disintegrazione radioattiva è proporzionale alla quantità di materiale radioattivo.

**Esercizio XI.** Una sostanza si dissolve in acqua. La velocità di dissoluzione è proporzionale alla quantità di sostanza presente. Al tempo  $t = 0$  vengono messi 20 grammi di sostanza in un recipiente di acqua. Sapendo che nei primi 5 minuti si sono sciolti 10 grammi di sostanza, determinare la quantità di sostanza dissolta dopo 7, 8, o 9 minuti.

**Esercizio XII.** Determinare la curva piana che passa per il punto  $(1, 1)$  e verifica che dato un punto qualunque  $(x, y)$ , al considerare l'intersezione della retta tangente alla curva in tale punto con l'asse delle ordinate e l'intersezione della retta perpendicolare con l'asse delle ascisse, le loro distanze all'origine siano uguali.

**Esercizio XIII.** Consideriamo un circuito elettrico costituito da un condensatore di capacità  $C$  che si scarica con una resistenza  $R$ . Sia  $u_C(t)$  la tensione agli estremi del condensatore (in volt) all'istante di tempo  $t$  (misurato in secondi). Per  $t = 0$  sappiamo che  $u_C$  vale 3 volt. Determinare  $u_C(t)$ .

**Esercizio XIV.** Un paracadutista si lascia cadere e la sua velocità nel momento in cui si apre il paracadute è di 55 m/s. A partire da questo momento incontra una resistenza

dell'aria direttamente proporzionale al prodotto del suo peso totale per il quadrato della sua velocità, con coefficiente di proporzionalità uguale a  $\frac{1}{25}$ . Determinare la velocità del paracadutista in ogni istante di tempo a partire dall'apertura del paracadute. Dimostrare che, dopo un breve periodo di tempo, il movimento si stabilizza a una velocità costante di 5 m/s, con un errore inferiore allo 0,001 %.

**Esercizio XV.** Uno studente portatore del virus dell'influenza entra in un campus universitario isolato dove vivono 1000 studenti. La velocità di propagazione del virus è direttamente proporzionale sia al numero di studenti contagiati sia al numero di studenti sani che quindi possono essere a loro volta contagiati. Determinare il numero di studenti contagiati dopo 6 giorni, sapendo che dopo 4 giorni gli studenti contagiati sono 50.

**Esercizio XVI.** Consideriamo una malattia contagiosa, non mortale, dove gli individui guariti possono di nuovo contagiarsi. Sia  $N$  il numero totale di individui della popolazione e  $i(t)$  il numero di persone contagiate al tempo  $t$ . Supponiamo che il tasso di contagio per unità di tempo sia proporzionale al numero totale di tutti i possibili contatti tra le persone sane e quelle malate, con costante di proporzionalità  $a > 0$ . Supponiamo altresì che il tasso di guarigione per unità di tempo sia proporzionale al numero di individui malati, con costante di proporzionalità  $b > 0$ . Mostrare che se  $aN - b > 0$  allora la malattia diventerà endemica, ovvero: il numero di individui malati tenderà a ad un numero costante nel tempo. Mostrare che se  $aN - b < 0$  allora la malattia sparirà. Calcolare il tempo necessario affinché queste due situazioni vengano raggiunte con un errore inferiore all'1 % (ovvero, eccetto un 1 % della popolazione, il numero di malati è costante positivo o è nullo) in base al numero  $i_0$  di persone malate al tempo 0.

**Esercizio XVII.** Facciamo uscire una torta dal forno a 180 °C. Secondo la legge del *raffreddamento newtoniano* la velocità di raffreddamento di un corpo è proporzionale alla differenza di temperatura tra il corpo e l'ambiente. Nel nostro caso, la temperatura dell'ambiente è di 20 °C e dopo 5 minuti la temperatura della torta risulta essere di 60 °C. Determinare quanto tempo dobbiamo aspettare per poter mangiare la torta senza bruciarci, sapendo che la soglia di temperatura tollerata per cibi caldi nella bocca è di circa 50 °C.

**Esercizio XVIII.** Due sostanze chimiche A e B reagiscono per formare una sostanza C. Inizialmente abbiamo 40 g di A e 50 g di B. In più, sappiamo che nel bilanciamento della reazione chimica per ogni grammo di B sono necessari due grammi di A. Dopo 5 minuti si osservano 10 g di C. Calcolare il tempo necessario affinché si formino 37 grammi di C. Ipotesi fisiche:

- a) La legge di Conservazione della massa di Lavoisier afferma che la quantità di sostanza C è sempre uguale alla somma delle quantità di sostanza di A e di B che hanno reagito.
- b) La velocità di reazione per formare C è proporzionale sia alla quantità di sostanza

di A ancora presente sia a quella di B ancora presente.

**Esercizio XIX.** Il tasso di alcoemia (quantità di alcol che c'è nel sangue, misurata in g/l) di una persona che ha consumato alcol verifica la equazione differenziale

$$y' + y = a e^{-t}$$

in funzione del tempo  $t$  (in ore), dove  $a$  è una costante che dipende dal soggetto in considerazione e dalla quantità di alcol consumata. In questo esercizio consideriamo  $a = 5$ . Determinare il tasso di alcoemia  $y(t)$  della persona in questione e disegnare il suo grafico. Calcolare dopo quanto tempo questo tasso è massimo dal momento del consumo di alcol. Calcolare quanto tempo deve passare affinché il tasso di alcoemia scenda al di sotto di 0.5 g/l (limite superiore per poter guidare secondo la legge attuale).

**Esercizio XX.** Consideriamo una persona che prende un certo farmaco efficace su un certo organo con volume uguale a  $125 \text{ cm}^3$ . Il flusso sanguigno porta il farmaco all'organo e tale flusso entra e sale dell'organo con la stessa velocità, uguale a  $3 \text{ cm}^3/\text{s}$ . La concentrazione del farmaco nel sangue che entra nell'organo è di  $0.2 \text{ g/cm}^3$ . Sia  $y(t)$  la quantità di farmaco presente nell'organo al tempo  $t$ . Determinare  $y(t)$  sapendo che il primo ingresso del farmaco nell'organo avviene nell'istante  $t = 0$ . Quando la concentrazione del farmaco nell'organo sarà pari a  $0.1 \text{ g/cm}^3$ ?

**Esercizio XXI.** **Caduta libera di un corpo.** Lasciamo cadere un corpo di 10 g, inizialmente immobile, da una altezza di 5 m dal suolo. Sapendo che la resistenza dell'aria (in Newton) è uguale a  $2v(t)$ , dove  $v(t)$  è la velocità al tempo  $t$  (in secondi), determinare il momento in cui il corpo raggiungerà il suolo.

**Esercizio XXII.** **Movimento armonico semplice e ammortizzato.** Vogliamo studiare il movimento di un corpo di massa  $m$  che, spostato da una posizione di equilibrio iniziale, è soggetto ad una forza elastica che attua per ristabilire la sua posizione iniziale (pensare ad una molla). In base alla *legge di Hooke*, questa forza è proporzionale allo spostamento dalla posizione iniziale di equilibrio. Se  $k$  è la costante di proporzionalità (chiamata *costante elastica*), far vedere che la *legge di Newton* porta alla seguente equazione, detta *equazione del movimento armonico semplice*:

$$m y'' = -k y$$

dove  $y = y(t)$  rappresenta la posizione del corpo al tempo  $t$ , essendo l'origine la posizione iniziale. Nell'esercizio di potrà pensare ad un corpo di massa 20 g inizialmente immobile e spostato di 5 cm dall'origine e ad una costante elastica di 8 N/m. Determinare la posizione del corpo dopo 1 minuto.

Successivamente, consideriamo anche una resistenza viscosa del mezzo in cui si muove il corpo, che attua in maniera proporzionale alla velocità del corpo. Se  $\mu$  è la costante

di proporzionalità (chiamata *costante di resistenza viscosa*), far vedere che si arriva all'equazione del *movimento armonico ammortizzato*:

$$m y'' = -\mu y' - k y.$$

1. Mostrare che la soluzione di questa equazione è di tre tipi differenti, a seconda che sia  $0 < \mu < 2\sqrt{mk}$ , oppure  $\mu = 2\sqrt{mk}$ , oppure  $\mu > 2\sqrt{mk}$ . Nel primo caso si parla di *ammortizzazione viscosa*, nel secondo di *ammortizzazione critica*, e nel terzo di *ammortizzazione sopracritica*.
2. Nel caso numerico anteriore, con in più  $\mu = 0,1 \text{ N s/m}$ , calcolare la posizione del corpo dopo 1 secondo.

**Esercizio XXIII. Movimento armonico forzato.** Consideriamo il caso di un oscillatore armonico semplice, soggetto ad una forza esterna di tipo periodico, per esempio  $f(t) = \cos(\eta t)$ .

1. Determinare l'equazione del movimento del corpo (detta equazione del *movimento armonico forzato*) e mostrare che se  $\eta = \sqrt{\frac{k}{m}}$  la ampiezza delle oscillazioni aumenta nel tempo dando luogo al fenomeno chiamato *risonanza*.
2. Nel caso numerico dell'esercizio precedente, con in più  $\eta = 2\pi$ , calcolare la posizione del corpo dopo 3 minuti.

Ripetere l'esercizio con un oscillatore armonico ammortizzato anziché semplice.

**Esercizio XXIV. Circuito RLC.** Consideriamo un circuito elettrico con una resistenza  $R$ , una induttanza  $L$ , un condensatore  $C$  ed un generatore di corrente che produce una tensione  $V(t)$  al tempo  $t$ . Utilizzare la *legge di Kirkhoff* per determinare l'equazione soddisfatta dall'intensità di corrente  $I(t)$  e mostrare che c'è una perfetta analogia con il caso di un oscillatore armonico ammortizzato e forzato. Utilizzare l'esercizio precedente per determinare l'intensità di corrente  $I(t)$  nel caso di un generatore di corrente alterna  $V(t) = \cos t$ , senza effettuare altri calcoli.