 MA 23 APR 2024

L'INSIEME DI CANTOR: HA MISURA NULLA BENCHÉ NON SIA NUMERABILE.

DEFINIZIONE: SE $F = \bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$ CON $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$ PER $i \neq j$

PONIAMO $\phi(F) = \bigcup_{i=1}^{N} \left(\left[a_i, a_i + \frac{b_i - a_i}{3}\right] \cup \left[b_i - \frac{b_i - a_i}{3}, b_i\right] \right) \subsetneq F$

DEFINIZIONE: $\begin{cases} F_0 = [0,1] \\ F_{n+1} = \phi(F_n) \text{ PER } n \geq 0 \end{cases}$

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$$

OSSERVAZIONE: F_n È COSTITUTO DA 2^n INTERVALLI $[a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$ DI LUNGHEZZA $b_i^{(n)} - a_i^{(n)} = \frac{1}{3^n}$ E PERCIÒ L'ESTENSIONE (MISURA) DI F_n È $|F_n| =$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} \left(b_i^{(n)} - a_i^{(n)}\right) = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

OSSERVAZIONE: PRESO $\varepsilon \in (0, +\infty)$ ESISTE n_0 TALE CHE $\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} < \varepsilon$ QUINDI DA $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n \subset F_{n_0}$ SEGUE CHE $|\mathcal{C}| = 0$ ANZI, $\mathcal{C}$ HA MISURA DI PEANO–JORDAN NULLA.

PER VERIFICARE CHE $\mathcal{C}$ NON È NUMERABILE CONVIENE RAPPRESENTARE I NUMERI REALI IN BASE 3 CIOÈ USARE SOLO LE CIFRE 0, 1, 2 CON LA CONVENZIONE CHE L'ALLINEAMENTO $[a_1 a_2 , c_1 c_2]_3$ RAPPRESENTI IL NUMERO $a_1 \cdot 3 + a_2 + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9}$, ESSENDO $a_1, a_2, c_1, c_2 \in \{0, 1, 2\}$.

SI DEVONO USARE ANCHE GLI ALLINEAMENTI ILLIMITATI, COME AD ESEMPIO $0.0100200010000 2\ldots$ OPPURE

$$[0.\overline{2}]_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3^k}$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1.$$

SI NOTI, PER CONFRONTO, CHE $[0.\overline{9}]_{10}$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} =$$

$$= \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

GLI ESTREMI $a_i^{(n)}, b_i^{(n)}$ VALE A DIRE LA FRONTIERA ∂F_n SI SCRIVONO BENE IN BASE 3 SENZA USARE LA CIFRA 1:

$$\partial F_0 = \{0, 1\} = \{[0.0]_3, [0.\overline{2}]_3\}$$

$$\partial F_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} = \{[0.00]_3, [0.0\overline{2}]_3, [0.20]_3, [0,2\overline{2}]_3\}$$

$$\partial F_2 = \left\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\right\} =$$

$$= \{[0.000]_3, [0.00\overline{2}]_3, [0.020]_3,$$

$[0.02\bar{2}]_3$, $[0.200]_3$, $[0.20\bar{2}]_3$, $[0.220]_3$, $[0.22\bar{2}]_3$ }

OSSERVAZIONE: $\partial F_n \subset \partial F_{n+1}$

IN GENERALE, SI TROVA CHE $\partial F_n =$

$$= \left\{ [0.c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1}]_3 : c_1, \dots, c_n \in \{0,2\},\ c_{n+1} \in \{0, \bar{2}\} \right\}$$

E $\operatorname{card} \partial F_n = 2^{n+1}$.

ESERCIZIO: ESPRIMERE $a_i^{(n)}$ E $b_i^{(n)}$ IN BASE 3.

OSSERVAZIONE: $\partial F_n \subset F_n$ QUINDI DAL FATTO CHE $\partial F_n \subset \partial F_{n+1} \subset \dots \subset \partial F_{n+k} \subset F_{n+k}$ PER OGNI $k \geq 0$ E $\partial F_n \subset F_n \subset F_{n-1} \subset F_{n-2} \subset \dots \subset F_0$ SEGUE CHE $\partial F_n \subset F_i$ PER OGNI $i \geq 0$. QUINDI $\partial F_n \subset \bigcap_{i=0}^{+\infty} F_i = \mathcal{C}$ E PERCIÒ L'INSIEME $T = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \partial F_n \subset \mathcal{C}$.

$\# T = \aleph_0$ PERCHÉ $\# \partial F_n = 2^{n+1}$.

DALL'INCLUSIONE $T \subset \mathcal{C}$ SEGUE, ESSENDO $\mathcal{C}$ CHIUSO, CHE $\bar{T} \subset \mathcal{C}$.

VERIFICHIAMO CHE L'INSIEME NON NUMERABILE $\left\{ [0.c_1 c_2 c_3 \dots]_3 : c_k \in \{0,2\} \right\} \subset \bar{T} \subset \mathcal{C}$.

NOTARE CHE AD OGNI ALLINEAMENTO $[0.c_1 c_2 c_3 \dots]_3$ CON $c_k \in \{0,2\}$ CORRISPONDE IL SOTTOINSIEME DI $\mathbb{Z}^+$ OTTENUTO PRENDENDO L'INTERO $k \in \mathbb{Z}^+$ SE E SOLO SE $c_k = 2$. AD ESEMPIO IL SOTTOINSIEME $S = \{2, 4, 6, \dots\}$ CORRISPONDE A $[0.020202\dots]_3 = [0.\overline{02}]_3$ INVECE $S = \{1\}$ CORRISPONDE A $[0.2000\dots]_3$

QUINDI L'INSIEME $\left\{ [0.c_1 c_2 c_3 \dots]_3 : c_k \in \{0,2\} \right\}$ È EQUIPOTENTE A $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$ CHE NON È NUMERABILE

VERIFICHIAMO CHE OGNI ELEMENTO $[0.c_1 c_2 c_3 \dots]_3$ STA IN T O IN ∂T. SUPPONIAMO CHE $[0.c_1 c_2 c_3 \dots]_3 \notin T$. ESSENDO $T = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \partial F_n$ E $\partial F_n \subset \partial F_{n+1}$, SI HA $[0.c_1 c_2 c_3 \dots]_3 \notin \partial F_n$ QUALUNQUE SIA n. MOSTRIAMO CHE $x = [0.c_1 c_2 c_3 \dots]_3 \in DT$ (È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE). PER OGNI n PRENDO $x_n = 0.c_1 \dots c_n 0 \in \partial F_n \subset T$ E VEDO CHE $x - x_n =$

$$= 0.\underbrace{000\dots0}_{n \text{ VOLTE}} c_{n+1} c_{n+2} \dots \leq$$

$$\leq \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \dots = \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

$$= \frac{2}{3^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n} \longrightarrow 0.$$