3 Esercizi di Geometria e Algebra - Lista 3: Numeri Complessi

Calcoli coi numeri complessi:

Esercizio 3.1. Sia $z = 2 + i \in \mathbb{C}$. Calcolare esplicitamente il numero $\frac{1}{z^2}$, inoltre determinare $\mathrm{Re}(z \cdot i)$ e $\mathrm{Im}(z \cdot i)$. Infine rappresentare z, $\frac{1}{z^2}$ e $z \cdot i$ nel piano di Gauss.

Esercizio 3.2. Siano $z = 3i$ e $w = 1 - i$. Calcolare $(z + w)^2$ e determinarne parte reale e immaginaria. Calcolare poi $\mathrm{Re}(zw)$ e $\mathrm{Im}(zw)$. Infine determinare $|zw|$ e $|z + w|$.

Esercizio 3.3. Sia $z = 1 + i$. Calcolare $\mathrm{Re}(z^{17})$ e $\mathrm{Im}(z^{17})$.
(*Suggerimento*: usare la forma trigonometrica del numero complesso z, aiutandosi con la sua rappresentazione nel Piano di Gauss)

Esercizio 3.4. Sia $z = 1 - i$. Calcolare $\mathrm{Re}(z^{11})$ e $\mathrm{Im}(z^{11})$.

Esercizio 3.5. Usando la forma trigonometrica dei numeri complessi, determinare le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + 4 = 0$$

Polinomi e Radici, Molteplicità:

Esercizio 3.6. Risolvere (in $\mathbb{C}$) l'equazione $z^2 + 3z + 3 = 0$.

Esercizio 3.7. Sia dato il polinomio $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z - 1$. Verificare che $z_0 = 1$ è una sua radice e determinare tutte le radici di P, ciascuna con la propria molteplicità algebrica.

Esercizio 3.8. Ripetere l'esercizio precedente con $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 8$ e $z_0 = 2$.