

# Controllo dei sistemi energetici

**Modelli matematici e  
linearizzazione. Progetto di  
controllori mediante  
linearizzazione**

**Ing. Alessandro Pisano**  
[apisano@unica.it](mailto:apisano@unica.it)

# Modelli matematici di sistemi energetici

Vi è una vasta gamma di tipologie di modelli matematici volti a caratterizzare il comportamento dei sistemi energetici (e non solo)

## Modelli matematici a **parametri concentrati**

Si compongono di equazioni differenziali ordinarie (ODE)

Le variabili di processo sono unicamente funzioni della variabile temporale

## Modelli matematici a **parametri distribuiti**

Si compongono di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE)

Le variabili di processo sono funzioni sia della variabile temporale che di una o più variabili spaziali

## Esempio - Dinamica di un sistema di storage termico di tipo “packet bed”.

“Schumann’s equations” per modellare il trasferimento di calore fra il fluido che attraversa il serbatoio ed il letto di materiale solido che immagazzina il calore.

$T_b(x,t)$  è la temperatura del materiale solido

$T_f(x,t)$  è la temperatura del fluido



$$\frac{\partial T_f}{\partial t} = -\frac{\dot{m}_f C_{P,f}}{\rho_f \varepsilon C_{V,f} A} \frac{\partial T_f}{\partial x} + \frac{h_V}{\rho_f \varepsilon C_{V,f}} (T_b - T_f)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} = \frac{6h}{\rho_b d_s C_{V,b}} (T_f - T_b),$$

$$h = \frac{k_f}{d_s} \left( 2 + 1.1 \left( \frac{C_{P,f} \mu_f}{k_f} \right)^{1/3} \left( \frac{\dot{m}_f d_s}{A \mu_f} \right)^{0.6} \right)$$

$$h_V = \frac{6h(1 - \varepsilon)}{d_s},$$

# Modelli matematici di sistemi energetici

## Modelli matematici a **tempo continuo**

La variabile temporale  $t$  assume valori reali

## Modelli matematici a **tempo discreto**

La variabile temporale  $k$  assume valori interi. Il modello matematico rappresenta il comportamento del sistema (cioè il valore delle variabili di processo) in corrispondenza degli "istanti di campionamento"  $t_k = kT_c$

# Modelli matematici di sistemi energetici

## Modelli matematici **ingresso-uscita**

Il modello rappresenta il legame fra le variabili di ingresso (manipolabili o disturbanti) e le variabili di uscita

## Modelli matematici in **variabili di stato**

Il modello definisce la dinamica delle **variabili di stato** nella loro interezza. Le variabili di stato sono quelle variabili che in un processo caratterizzano i fenomeni di scambio ed accumulo energetico. Le variabili di uscita sono funzioni **algebriche** delle variabili di stato (e in taluni casi anche delle variabili di ingresso)

## Modelli matematici in variabili di stato

La rappresentazione dei modelli matematici dei processi nella forma «variabili di stato» è più generale rispetto alla rappresentazione ingresso-uscita in quanto caratterizza in maniera completa il comportamento dinamico delle «**variabili di stato**».

Presentiamo la forma che assume tale rappresentazione nel caso di:

- modello a parametri concentrati
- modello a tempo continuo

$\dot{x}(t) = f(x, u, d)$       **Equazione di stato (ODE accoppiate)**

$y(t) = h(x, u, d)$       **Trasformazione in uscita**

$x(t_0) = x_0$       **Condizioni iniziali**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) \quad \text{Equazione di stato (ODE accoppiate)}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) \quad \text{Trasformazione in uscita}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^n$$

Vettore di stato di dimensione **n** (ordine del sistema) - State variables (**SV**)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^m$$

Vettore degli ingressi  
manipolabili –  
Manipulated variables  
(**MV**)

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^r$$

Vettore degli  
ingressi non  
manipolabili  
(disturbi) –  
Disturbance  
variables (**DV**)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^p$$

Vettore delle uscite – Controlled variables (**CV**)

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$       Equazione di stato (ODE accoppiate)

$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$       Trasformazione in uscita

### Forma estesa:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

⋮

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

$$\mathbf{f}(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

$$y_1(t) = h_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

$$y_2(t) = h_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

⋮

$$y_p(t) = h_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

$$\mathbf{h}(\cdot) = \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ \vdots \\ h_p(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^p$$

In numerosi casi pratici, **la trasformazione in uscita non dipende dagli ingressi.**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) \quad \text{Equazione di stato (ODE accoppiate)}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad \text{Trasformazione in uscita}$$

**Forma estesa:**

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

⋮

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)$$

$$y_1(t) = h_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_2(t) = h_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

⋮

$$y_p(t) = h_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Spesso, inoltre, le uscite coincidono con una o più delle variabili di stato, ed in tal caso la trasformazione in uscita assume una forma particolarmente semplice

**Esempio:**

$n=3$ ,  $m=1$  ( $u_1 \equiv u$ ),  $r=1$  ( $d_1 \equiv d$ ),  $p=1$  ( $y_1 \equiv y$ ) e l'uscita coincide con la prima variabile di stato

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, u, d)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, u, d)$$

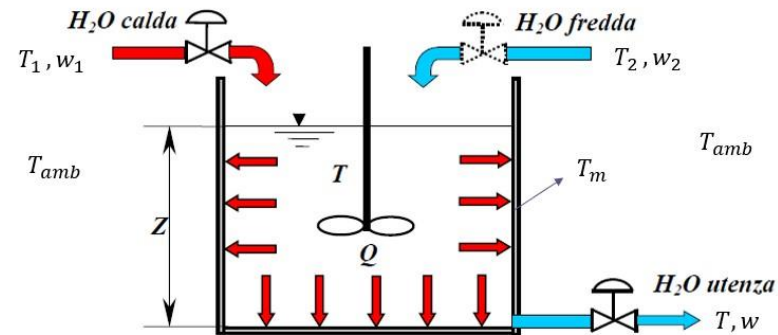
$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u, d)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\mathbf{f}(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \\ f_3(\cdot) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(\cdot) = [x_1]$$

## Esempio: Miscelatore



$$\rho C_V A z(t) \frac{dT(t)}{dt} = w_1(t) C_V (T_1 - T(t)) + w_2(t) C_V (T_2 - T(t)) - hPz(t) (T(t) - T_m(t))$$

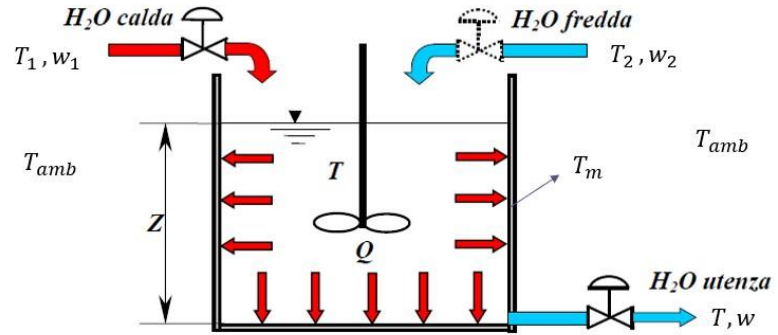
$$M_m C_{Vm} \frac{dT_m(t)}{dt} = hPz(t) (T(t) - T_m(t)) + \frac{(T_{amb}(t) - T_m(t))}{R_{ma}}$$

$$\rho A \frac{dz(t)}{dt} = w_1(t) + w_2(t) - w(t)$$

Vettore di stato (SV)  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ T_m(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$  Modello del terz'ordine ( $n = 3$ )

Vettore degli ingressi manipolabili (MV)  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$   $m = 2$

# Esempio: Miscelatore



$$\rho C_V A z(t) \frac{dT(t)}{dt} = w_1(t) C_V (T_1 - T(t)) + w_2(t) C_V (T_2 - T(t)) - hPz(t) (T(t) - T_m(t))$$

$$M_m C_{Vm} \frac{dT_m(t)}{dt} = hPz(t) (T(t) - T_m(t)) + \frac{(T_{amb}(t) - T_m(t))}{R_{ma}}$$

$$\rho A \frac{dz(t)}{dt} = w_1(t) + w_2(t) - w(t)$$

Vettore degli ingressi non manipolabili (DV)

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \\ d_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_{amb}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad r = 4$$

Vettore delle uscite (CV)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad p = 2$$

## Esempio: Miscelatore

Per ricavare le espressioni delle funzioni  $f_1$ ,  $f_2$  ed  $f_3$  dobbiamo manipolare le equazioni differenziali riscrivendole in **forma esplicita**, cioè isolando alla sinistra dell'uguale le derivate delle variabili di stato

$$\rho C_V A z(t) \frac{dT(t)}{dt} = w_1(t) C_V (T_1 - T(t)) + w_2(t) C_V (T_2 - T(t)) - hPz (T(t) - T_m(t))$$



$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A z(t)} w_1(t) (T_1 - T(t)) + \frac{1}{\rho A z(t)} w_2(t) (T_2 - T(t)) - \frac{1}{\rho C_V A} hP (T(t) - T_m(t)) \\ &= - \left[ \frac{w_1(t) + w_2(t)}{\rho A z(t)} + \frac{hP}{\rho C_V A} \right] T(t) + \frac{hP}{\rho C_V A} T_m(t) + \frac{w_1(t)}{\rho A z(t)} T_1 + \frac{w_2(t)}{\rho A z(t)} T_2 \end{aligned}$$

## Esempio: Miscelatore

$$M_m C_{Vm} \frac{dT_m(t)}{dt} = hPz(t) (T(t) - T_m(t)) + \frac{(T_{amb}(t) - T_m(t))}{R_{ma}}$$



$$\begin{aligned} \frac{dT_m(t)}{dt} &= \frac{hPz(t)}{M_m C_{Vm}} (T(t) - T_m(t)) + \frac{1}{M_m C_{Vm}} \frac{(T_{amb}(t) - T_m(t))}{R_{ma}} \\ &= - \left[ \frac{hPz(t)}{M_m C_{Vm}} + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \right] T_m(t) + \frac{hPz(t)}{M_m C_{Vm}} T(t) + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} T_{amb}(t) \end{aligned}$$

$$\rho A \frac{dz(t)}{dt} = w_1(t) + w_2(t) - w(t)$$



$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A} [w_1(t) + w_2(t) - w(t)]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, d_1, d_2) = \\
 &= - \left[ \frac{w_1(t) + w_2(t)}{\rho A z(t)} + \frac{hP}{\rho C_V A} \right] T(t) + \frac{hP}{\rho C_V A} T_m(t) + \frac{w_1(t)}{\rho A z(t)} T_1 + \frac{w_2(t)}{\rho A z(t)} T_2 \\
 &= - \left[ \frac{u_1(t) + u_2(t)}{\rho A x_3(t)} + \frac{hP}{\rho C_V A} \right] x_1(t) + \frac{hP}{\rho C_V A} x_2(t) + \frac{u_1(t)}{\rho A x_3(t)} d_1 + \frac{u_2(t)}{\rho A x_3(t)} d_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_m(t)}{dt} &= \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, d_3) = \\
 &= - \left[ \frac{hPz(t)}{M_m C_{Vm}} + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \right] T_m(t) + \frac{hPz(t)}{M_m C_{Vm}} T(t) + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} T_{amb}(t) \\
 &= - \left[ \frac{hPx_3(t)}{M_m C_{Vm}} + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \right] x_2(t) + \frac{hPx_3(t)}{M_m C_{Vm}} x_1(t) + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} d_3(t)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx_3(t)}{dt} = f_3(u_1, u_2, d_4) = \frac{1}{\rho A} [u_1(t) + u_2(t) - d_4(t)]$$

## Equazioni di stato e trasformazione in uscita

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, d_1, d_2) \\ &= - \left[ \frac{u_1(t) + u_2(t)}{\rho A x_3(t)} + \frac{hP}{\rho C_V A} \right] x_1(t) + \frac{hP}{\rho C_V A} x_2(t) + \frac{u_1(t)}{\rho A x_3(t)} d_1(t) + \frac{u_2(t)}{\rho A x_3(t)} d_2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3, d_3) \\ &= - \left[ \frac{hP x_3(t)}{M_m C_{Vm}} + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \right] x_2(t) + \frac{hP x_3(t)}{M_m C_{Vm}} x_1(t) + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} d_3(t)\end{aligned}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = f_3(u_1, u_2, d_4) = \frac{1}{\rho A} [u_1(t) + u_2(t) - d_4(t)]$$

$$y_1(t) = h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1(t)$$

$$y_2(t) = h_2(x_1, x_2, x_3) = x_3(t)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ T_m(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \\ d_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_{amb}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

# Modelli matematici in variabili di stato **a tempo discreto**

Nelle rappresentazioni a tempo discreto dei sistemi dinamici le variabili coinvolte sono valutate in corrispondenza degli **istanti di campionamento**

$$t_k = kT_c$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$T_c > 0$$

**Periodo di campionamento**

Notazione:

$$\mathbf{x}(t_k) \equiv \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{u}(t_k) \equiv \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{d}(t_k) \equiv \mathbf{d}_k$$

$$\mathbf{y}(t_k) \equiv \mathbf{y}_k$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{d}_k)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{x}_{k_0} \text{ assegnato}$$

**Equazione di stato (eq. alle differenze accoppiate)**

**Trasformazione in uscita**

**Condizioni iniziali**

Vi sono diversi approcci attraverso i quali ricavare un modello in variabili di stato a tempo discreto a partire da un modello a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$$

Chiaramente si avrà:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \mathbf{d}(\tau)) d\tau$$

Il metodo più semplice, chiamato **metodo di Eulero**, si basa sulla approssimazione che nell'intervallo temporale  $[kT_c, (k+1)T_c]$  le variabili di stato e quelle di ingresso si mantengano costanti e pari al valore assunto all'istante iniziale dell'intervallo.

Il metodo più semplice, chiamato **metodo di Eulero**, si basa sulla approssimazione che nell'intervallo temporale  $[kT_c, (k+1)T_c]$  le variabili di stato e quelle di ingresso si mantengano costanti e pari al valore assunto all'istante iniziale dell'intervallo.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \mathbf{d}(\tau)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{d}_k) \quad \forall \tau \in [kT_c, (k+1)T_c)$$

Applicando tale approssimazione si ricava:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \mathbf{d}(\tau)) d\tau = \mathbf{x}_k + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{d}_k) d\tau = \\ &= \mathbf{x}_k + T_c \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{d}_k) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{d}_k) \end{aligned}$$

E' chiaro che la bontà di tale approssimazione è tanto migliore quanto più è piccolo il periodo di campionamento

Le rappresentazioni a tempo discreto rivestono un ruolo fondamentale nei metodi di pianificazione e controllo basati su ottimizzazione statica e dinamica (come il model predictive control - MPC) in quanto tali tecniche richiedono la formulazione della dinamica del sistema da controllare sotto forma di un modello in variabili di stato a tempo discreto.

## Esempio: scambiatore di calore in controcorrente

Modello VDS in forma esplicita

$$\frac{dT_a(t)}{dt} = \frac{1}{m_a} w_a(t) (T_{a,IN} - T_a(t)) + \frac{1}{m_a c_a R_{ba}} \Delta T_{ba}^{ML}(t)$$

$$\frac{dT_b(t)}{dt} = \frac{1}{m_b} w_b(t) (T_{b,IN} - T_b(t)) - \frac{1}{m_b c_b R_{ba}} \Delta T_{ba}^{ML}(t)$$

$$\Delta T_{ba}^{ML}(t) = \begin{cases} \frac{(T_{b,IN} - T_a(t)) - (T_b(t) - T_{a,IN})}{\ln\left(\frac{(T_{b,IN} - T_a(t))}{(T_b(t) - T_{a,IN})}\right)} & (T_{b,IN} - T_a(t)) \neq (T_b(t) - T_{a,IN}) \\ (T_{b,IN} - T_a(t)) & (T_{b,IN} - T_a(t)) = (T_b(t) - T_{a,IN}) \end{cases}$$

Notazione:

$$T_a(kT_c) = T_{a,k} \quad T_b(kT_c) = T_{b,k} \quad w_a(kT_c) = w_{a,k} \quad w_b(kT_c) = w_{b,k}$$

Applicando il metodo di Eulero si ricava il seguente modello a tempo discreto:

$$T_{a,k+1} = T_{a,k} + T_c \left. \frac{dT_a(t)}{dt} \right|_{t=kT_c} \quad T_{b,k+1} = T_{b,k} + T_c \left. \frac{dT_b(t)}{dt} \right|_{t=kT_c}$$

$$T_{a,k+1} = T_{a,k} + T_c \left[ \frac{1}{m_a} w_{a,k} (T_{a,IN} - T_{a,k}) + \frac{1}{m_a c_a R_{ba}} \Delta T_{ba}^{ML}(k) \right]$$

$$T_{b,k+1} = T_{b,k} + T_c \left[ \frac{1}{m_b} w_{b,k} (T_{b,IN} - T_{b,k}) - \frac{1}{m_b c_b R_{ba}} \Delta T_{ba}^{ML}(k) \right]$$

$$\Delta T_{ba}^{ML}(k) = \begin{cases} \frac{(T_{b,IN} - T_{a,k}) - (T_{b,k} - T_{a,IN})}{\ln \left( (T_{b,IN} - T_{a,k}) / (T_{b,k} - T_{a,IN}) \right)} & (T_{b,IN} - T_{a,k}) \neq (T_{b,k} - T_{a,IN}) \\ (T_{b,IN} - T_{a,k}) & (T_{b,IN} - T_{a,k}) = (T_{b,k} - T_{a,IN}) \end{cases}$$

Metodi di discretizzazione alternativi

## Runge-Kutta del 3° ordine (RK3):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t))$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{k}_2 = T_c \mathbf{f} \left( \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \mathbf{k}_1, \mathbf{u} \left( t_k + \frac{1}{2} T_c \right), \mathbf{d} \left( t_k + \frac{1}{2} T_c \right) \right)$$

$$\mathbf{k}_1 = T_c \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{d}_k)$$

## Runge-Kutta del 4° ordine (RK4):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t))$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_4$$

$$\mathbf{k}_1 = T_c \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{d}_k)$$

$$\mathbf{k}_2 = T_c \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{u}\left(t_k + \frac{1}{2}T_c\right), \mathbf{d}\left(t_k + \frac{1}{2}T_c\right)\right)$$

$$\mathbf{k}_3 = T_c \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{u}\left(t_k + \frac{1}{2}T_c\right), \mathbf{d}\left(t_k + \frac{1}{2}T_c\right)\right)$$

$$\mathbf{k}_4 = T_c \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \mathbf{k}_3, \mathbf{u}(t_{k+1}), \mathbf{d}(t_{k+1}))$$

# Modelli matematici **lineari** in variabili di stato

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$$

Equazione di stato (ODE accoppiate)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Trasformazione in uscita



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{E} \mathbf{d}(t)$$

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  matrici **costanti** di dimensione opportuna

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

**SV**

**MV**

**DV**

**CV**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^n$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^m$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^r$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^p$$

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$$

$$\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{n \times m}$$

$$\mathbf{E} \in \mathcal{R}^{n \times r}$$

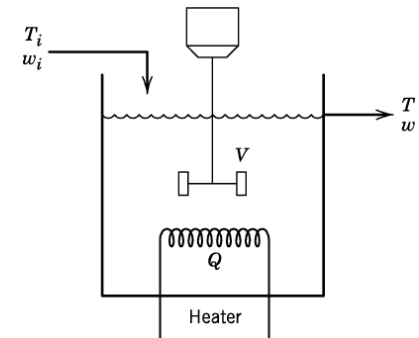
$$\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{p \times n}$$

$$\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{p \times m}$$

## Esempio: Reattore con mescolamento e riscaldamento

$$mc \frac{dT(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T(t)) + K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$

$$m_r c_r \frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$



Questo sistema può essere controllato in due maniere distinte al fine di regolare ad un valore desiderato  $T^{des}$  la temperatura  $T(t)$  del fluido contenuto nel serbatoio.

- a.) è possibile variare in linea la potenza  $Q(t)$  con cui si alimenta la resistenza **mantenendo costante la portata  $w(t)$**
- b.) è possibile variare in linea la portata  $w(t)$  con cui la quale il fluido viene immesso e prelevato dal reattore

Nel caso a.) si ottiene un modello matematico **lineare**

Determiniamo le matrici della rappresentazione in VDS associate al caso a.)

Ipotesi:  $w(t) = W = cost.$

$$mc \frac{dT(t)}{dt} = cW(T_i(t) - T(t)) + K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$

$$m_r c_r \frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$



Forma esplicita

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{[cW + K_e A_m]}{mc} T(t) + \frac{K_e A_m}{mc} T_r(t) + \frac{W}{m} T(t)$$

$$\frac{dT_r(t)}{dt} = \frac{K_e A_m}{m_r c_r} T(t) - \frac{K_e A_m}{m_r c_r} T_r(t) + \frac{1}{m_r c_r} Q(t)$$

$$y(t) = T(t)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{[cW + K_e A_m]}{mc} T(t) + \frac{K_e A_m}{m c} T_r(t) + \frac{W}{m} T_i(t)$$

$$\frac{dT_r(t)}{dt} = \frac{K_e A_m}{m_r c_r} T(t) - \frac{K_e A_m}{m_r c_r} T_r(t) + \frac{1}{m_r c_r} Q(t)$$

$$y(t) = T(t)$$

**SV****MV****DV****CV**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} T(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = Q(t)$$

$$\mathbf{d} = T_i(t)$$

$$\mathbf{y} = T(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dT(t)}{dt} \\ \frac{dT_r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} T(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} Q(t) + \mathbf{E} T_i(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{[cW + K_e A_m]}{mc} & \frac{K_e A_m}{m c} \\ \frac{K_e A_m}{m_r c_r} & -\frac{K_e A_m}{m_r c_r} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} T(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

$$\mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_r c_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{W}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Proprietà della rappresentazione in VDS e legami con la rappresentazione ingresso-uscita

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{E} \mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

La matrice  $\mathbf{A}$  riveste un ruolo predominante rispetto alle restanti matrici presenti nel modello. In particolare, i suoi **autovalori**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  determinano le proprietà di stabilità o instabilità del sistema.

Il sistema dinamico è **asintoticamente stabile** se e solo se gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  sono tutti a parte reale negativa.

Se il sistema è asintoticamente stabile si ha la garanzia che con ingressi e disturbi costanti lo stato  $x(t)$  tende asintoticamente verso i valori di stato stazionario ottenuti imponendo che  $\dot{x}(t) = 0$

Se gli autovalori di  $A$  sono tutti reali negativi, il transitorio di convergenza verso lo stato stazionario sarà esente da oscillazioni, se invece  $A$  possiede una o più coppie di autovalori complessi coniugati allora l'evoluzione transitoria dello stato sarà caratterizzata da oscillazioni.

Se gli autovalori della matrice  $A$  si «spostano» verso sinistra la rapidità di convergenza aumenta.

Gli autovalori della matrice  $A$  rivestono per l'evoluzione temporale delle variabili di stato un ruolo del tutto analogo a quello dei poli delle funzioni di trasferimento fra gli ingressi e le uscite.

## Calcolo delle funzioni di trasferimento

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}d(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

A partire da un modello in VDS, possono essere determinate semplicemente in forma chiusa le **funzioni di trasferimento**  $G_u^y(s)$  tra gli ingressi manipolabili ( $\mathbf{u}(t)$ ) e le uscite ( $\mathbf{y}(t)$ ) e le funzioni di trasferimento  $G_d^y(s)$  fra gli ingressi disturbanti ( $d(t)$ ) e le uscite ( $\mathbf{y}(t)$ )

Come ricaviamo tali espressioni ?

Definizione delle FdT:

$$\mathbf{Y}(s) = G_u^y(s)\mathbf{U}(s) + G_d^y(s)\mathbf{D}(s)$$

Modello in VDS

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}d(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$



Trasformata di Laplace  
del modello in VDS con  
condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0)$  nulle

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{D}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)\end{aligned}$$



Rielaborando:

$$(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E}\mathbf{D}(s)$$

$\mathbf{I}_n$  = matrice identità di  
ordine n



$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}(s)$$



$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) =$$

$$= \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$= [\mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}(s)$$

$$= \mathbf{G}_u^y(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_d^y(s)\mathbf{D}(s)$$

Le relative espressioni sono pertanto:

$$G_u^y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$G_d^y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}$$

$\mathbf{I}_n$  = matrice identità di ordine n

In un sistema con più ingressi e/o più uscite, si parla più propriamente di **matrice di trasferimento**

Ad esempio, in un sistema con due ingressi manipolabili ( $m=2$ ), due uscite ( $p=2$ ) ed un ingresso disturbante ( $r=1$ ) si avrà

$$G_u^y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{u,11}^y(s) & G_{u,12}^y(s) \\ G_{u,21}^y(s) & G_{u,22}^y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} & \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \end{bmatrix}$$

$$G_d^y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} G_{d,1}^y(s) \\ G_{d,2}^y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{D_1(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{D_1(s)} \end{bmatrix}$$

Per tale sistema, applicando il **principio di sovrapposizione degli effetti**, si avrà

$$Y(s) = G_u^y(s)U(s) + G_d^y(s)D(s) = \begin{bmatrix} G_{u,11}^y(s) & G_{u,12}^y(s) \\ G_{u,21}^y(s) & G_{u,22}^y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{d,1}^y(s) \\ G_{d,2}^y(s) \end{bmatrix} D(s)$$



in forma estesa

$$Y_1(s) = G_{u,11}^y(s)U_1(s) + G_{u,12}^y(s)U_2(s) + G_{d,1}^y(s)D(s)$$

$$Y_2(s) = G_{u,21}^y(s)U_1(s) + G_{u,22}^y(s)U_2(s) + G_{d,2}^y(s)D(s)$$

## Esempio: Reattore con mescolamento e riscaldamento (continua)

$$\begin{bmatrix} \frac{dT(t)}{dt} \\ \frac{dT_r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} T(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} Q(t) + \mathbf{E} T(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{[cW + K_e A_m]}{mc} & \frac{K_e A_m}{m c} \\ \frac{K_e A_m}{m_r c_r} & -\frac{K_e A_m}{m_r c_r} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} T(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = T(t)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

$$\mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_r c_r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{W}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con riferimento a questo esempio, possono essere determinate le due funzioni di trasferimento

$$\mathbf{D} = 0$$

$$G_Q^T(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \cancel{\mathbf{D}} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$$G_{T_i}^T(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}$$

Sviluppiamo i conti:

$$G_Q^T(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C} \Phi(s) \mathbf{B}$$

$$G_{T_i}^T(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{C} \Phi(s) \mathbf{E}$$

Iniziamo con il calcolare la matrice

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \quad n = 2$$

che viene detta «**matrice di transizione dello stato**»

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{cW + K_e A_m}{mc} & -\frac{K_e A_m}{mc} \\ -\frac{K_e A_m}{m_r c_r} & s + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \end{bmatrix}^{-1}$$

**Inversa di una matrice 2x2**

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{adj}(M^T) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI_2 - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{cW + K_e A_m}{mc} & -\frac{K_e A_m}{mc} \\ -\frac{K_e A_m}{m_r c_r} & s + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det(sI_2 - \mathbf{A}) = \left[ s + \frac{cW + K_e A_m}{mc} \right] \left[ s + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \right] - \frac{K_e^2 A_m^2}{m c m_r c_r} = P_{car}(\mathbf{A})$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{\left[ s + \frac{cW + K_e A_m}{mc} \right] \left[ s + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \right] - \frac{K_e^2 A_m^2}{m c m_r c_r}} \begin{bmatrix} s + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} & \frac{K_e A_m}{mc} \\ \frac{K_e A_m}{m_r c_r} & s + \frac{cW + K_e A_m}{m} \end{bmatrix}$$

### Inversa di una matrice 2x2

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{adj}(M^T) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 G_Q^T(s) &= \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} = [1 \quad 0] \Phi(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_r c_r} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\left[s + \frac{cW + KeAm}{m}\right] \left[s + \frac{KeAm}{m_r c_r}\right] - \frac{K_e^2 A_m^2}{m c m_r c_r}} \begin{bmatrix} s + \frac{KeAm}{m_r c_r} & \frac{KeAm}{m c} \\ \frac{1}{m_r c_r} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_r c_r} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\frac{KeAm}{m c m_r c_r}}{\left[s + \frac{cW + KeAm}{m}\right] \left[s + \frac{KeAm}{m_r c_r}\right] - \frac{K_e^2 A_m^2}{m c m_r c_r}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{T_i}^T(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} \\
 &= \frac{1}{\left[s + \frac{cW + KeAm}{m}\right] \left[s + \frac{KeAm}{m_r c_r}\right] - \frac{K_e^2 A_m^2}{m c m_r c_r}} \begin{bmatrix} s + \frac{KeAm}{m_r c_r} & \frac{KeAm}{m c} \\ \frac{1}{m_r c_r} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{W}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{W}{m} \frac{s + \frac{KeAm}{m_r c_r}}{\left[s + \frac{cW + KeAm}{m c}\right] \left[s + \frac{KeAm}{m_r c_r}\right] - \frac{K_e^2 A_m^2}{m c m_r c_r}}
 \end{aligned}$$

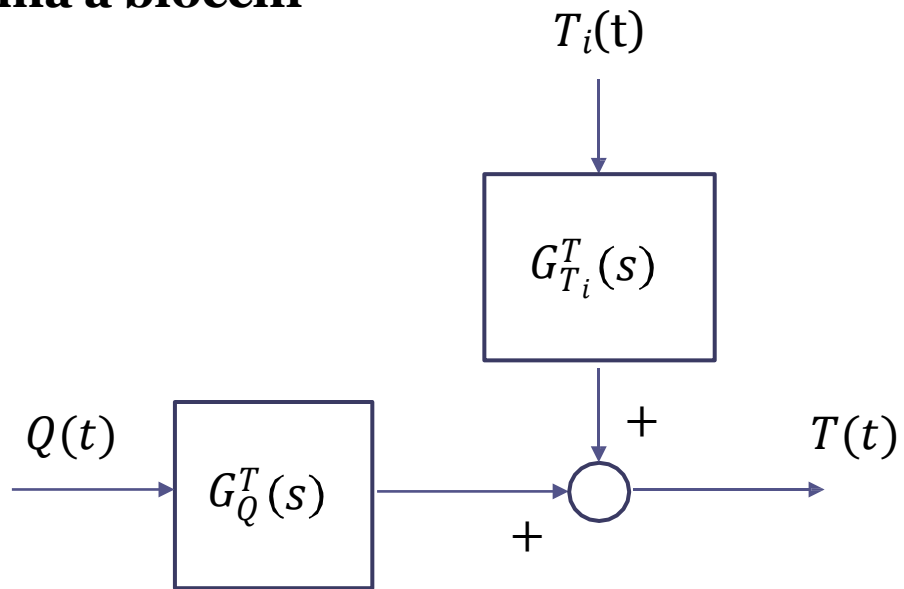
$$G_Q^T(s) = \frac{\frac{K_e A_m}{m c m_r c_r}}{s^2 + \left( \frac{cW + K_e A_m}{mc} + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \right) s + \frac{W}{m} \cdot \frac{K_e A_m}{m_r c_r}}$$

$$G_{T_i}^T(s) = \frac{\frac{W}{m} \left( s + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \right)}{s^2 + \left( \frac{cW + K_e A_m}{mc} + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \right) s + \frac{W}{m} \cdot \frac{K_e A_m}{m_r c_r}}$$

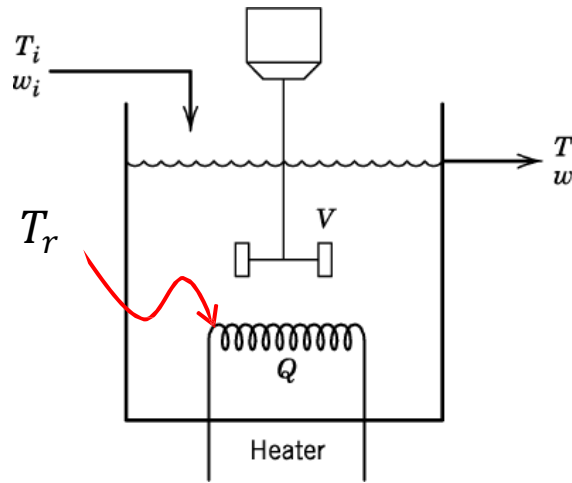
Le due funzioni di trasferimento hanno **gli stessi poli**, che **coincidono con gli autovalori della matrice A** in quanto **il polinomio a denominatore delle FdT  $G_Q^T(s)$  e  $G_{T_i}^T(s)$  è il polinomio caratteristico della matrice A.**

La FdT  $G_{T_i}^T(s)$  possiede in aggiunta uno zero reale negativo.

## Schema a blocchi



Valutiamo i parametri e le matrici del modello in corrispondenza di uno scenario concreto.



$$mc \frac{dT(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T(t)) + K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$

$$m_r c_r \frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$

Liquido coinvolto: **acqua**

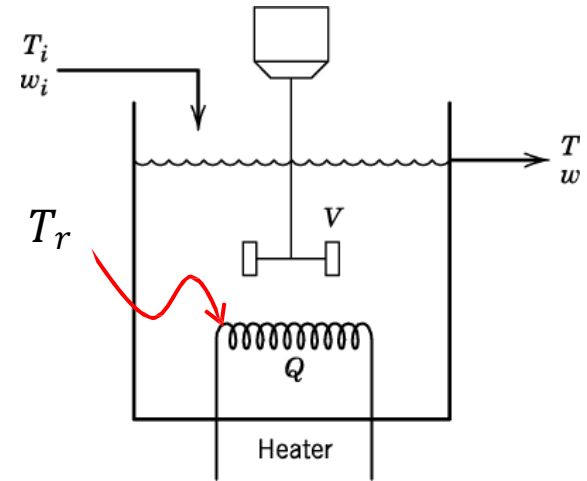
**Volume** di acqua nel serbatoio costante  $w_i(t) = w(t)$   $V = 2m^3$

**Portata costante** in ingresso e uscita:  $w(t) = W = 0.1 \frac{kg}{s}$

Resistenza elettrica in **rame**

$$mc \frac{dT(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T(t)) + K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$

$$m_r c_r \frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$



**acqua**

Calore specifico:  $c = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{K}}$

Densità  $\rho = 979 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

**rame**

$c_r = 385 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{K}}$

$\rho_r = 8910 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Massa dell'acqua nel serbatoio  $m = \rho V = 979 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 2 \text{ m}^3 = 1958 \text{ kg}$

## Resistenza elettrica in rame



$$D = 0.01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

Diametro

$$L_{eq} = 1.5 \text{ m}$$

Lunghezza equivalente

$$A_m = \pi D L_{eq} = 0.047 \text{ m}^2$$

Superficie di scambio rame-acqua

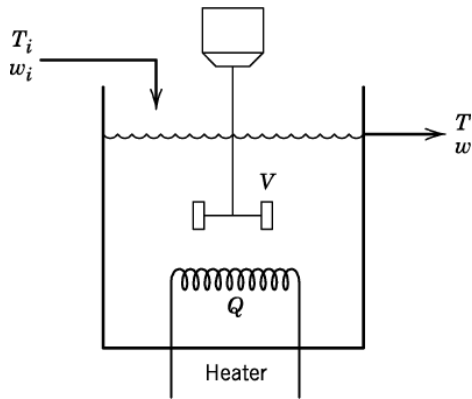
$$m_r = \rho_r \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 L_{eq} = 1.049 \text{ kg}$$

Massa della resistenza in rame

$$K_e = 3000 \frac{W}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ K}$$

Coefficiente di scambio termico convettivo per unita di superficie

## Riepilogo dei parametri



$$mc \frac{dT(t)}{dt} = cW(T_i(t) - T(t)) + K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$

$$m_r c_r \frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - K_e A_m (T_r(t) - T(t))$$

$$m = 1958 \text{ kg}$$

$$c = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$W = 0.1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$K_e = 3000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$A_m = 0.047 \text{ m}^2$$

$$m_r = 1.049 \text{ kg}$$

$$c_r = 385 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

## Matrici del modello in VDS

$$\begin{bmatrix} \frac{dT(t)}{dt} \\ \frac{dT_r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} T(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} Q(t) + \mathbf{E} T(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} T(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = T(t) \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{[cW + K_e A_m]}{mc} & \frac{K_e A_m}{m c} \\ \frac{K_e A_m}{m_r c_r} & -\frac{K_e A_m}{m_r c_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000068 & 0.000017 \\ 0.3498 & -0.3498 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_r c_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0024 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{W}{m} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 \cdot 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 G_Q^T(s) &= \frac{\frac{K_e A_m}{m c m_r c_r}}{s^2 + \left( \frac{cW + K_e A_m}{mc} + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \right) s + \frac{W}{m} \cdot \frac{K_e A_m}{m_r c_r}} \\
 &= \frac{0.4274 \cdot 10^{-7}}{s^2 + 0.3499 s + 1.786 \cdot 10^{-5}} \\
 &= \frac{0.4274 \cdot 10^{-7}}{(s + 0.3499)(s + 0.00005107)} = \frac{0.002392}{(2.858 s + 1)(19580 s + 1)} \\
 &\approx \frac{0.002392}{(19580 s + 1)} \quad \text{Polo dominante} \quad \left( r \approx \frac{m}{W} = 19580 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{T_i}^T(s) &= \frac{\frac{W}{m} \left( s + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \right)}{s^2 + \left( \frac{cW + K_e A_m}{mc} + \frac{K_e A_m}{m_r c_r} \right) s + \frac{W}{m} \cdot \frac{K_e A_m}{m_r c_r}} \\
 &= \frac{5.107 \cdot 10^{-5} \cancel{(s + 0.3499)}}{\cancel{(s + 0.3499)}(s + 0.00005107)} \approx \frac{5.107 \cdot 10^{-5}}{(s + 0.00005107)} = \frac{1}{19580 s + 1} \\
 &\quad \text{Cancellazione polo-zero}
 \end{aligned}$$

## Modelliamo il sistema in Simulink ed eseguiamo alcuni test

$$mc \frac{dT(t)}{dt} = cW(T_i(t) - T(t)) + K_e A_m (T_r(t) - T(t)) \quad (1)$$

$$m_r c_r \frac{dT_r(t)}{dt} = Q(t) - K_e A_m (T_r(t) - T(t)) \quad (2)$$



Forma esplicita

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{W}{m} (T_i(t) - T(t)) + \frac{K_e A_m}{mc} (T_r(t) - T(t)) \quad (3)$$

$$\frac{dT_r(t)}{dt} = \frac{1}{m_r c_r} Q(t) - \frac{K_e A_m}{m_r c_r} (T_r(t) - T(t)) \quad (4)$$

**File:** Reattore\_con\_mescolamento\_e\_riscaldamento\_live.mlx

## Definizione dei parametri

```
% Parametri del sistema

w=0.1; % portata di lavoro [kg/s]
V=2; %volume dell'acqua presente nel serbatoio [m^3]
rho=979; %densita dell'acqua a 60°C e 100kPa [kg / m^3]
c=4180; %calore specifico dell'acqua a 25°C e 100kPa [J/kg °K]
m=rho*V;% massa acqua
Ke=3000; % coeff. di scamio termico convettivo acqua-rame [W/°K m^2]

% serpentina di rame
D=0.01; %diametro
L=1.5; %lunghezza equivalente;
Am=pi*D*L; %superficie esterna di scambio

cr=385; % calore specifico del rame a 25° e 100kPa [J/kg °K]
rho_cu=8910; % densita del rame a 20° e 100kPa [kg/m^3]

mr=rho_cu*pi*(D/2)^2*L; % massa resistenza in rame
```

## Calcolo delle funzioni di trasferimento applicando le espressioni esplicite ricavate a lezione:

```

N1_f=Ke*Am/(m*c*mr*cr);
D1_f=[1 (c*w+Ke*Am)/(m*c)+Ke*Am/(mr*cr) w*Ke*Am/(m*mr*cr)];
N2_f=w/m*[1 Ke*Am/(mr*cr)];
D2_f=D1_f;

format long

disp('Funzioni di trasferimento:')
G_QT_f=tf(N1_f,D1_f)
G_TiT_f=tf(N2_f,D2_f)

disp('Determinazione dei poli e del guadagno statico di G_QT(s)')
poliG_QTf=roots(D1_f)
costditempoG_QT=-1./poliG_QTf
gainG_QTf=dcgain(G_QT_f)

disp('Determinazione dello zero e del guadagno statico di G_TiT(s)')
zeriG_TiT=roots(N2_f)
gainG_TiT=dcgain(G_TiT_f)

```

Funzioni di trasferimento:

G\_QT\_f =

$$\frac{4.274e-08}{s^2 + 0.3499 s + 1.787e-05}$$

Continuous-time transfer function.

G\_TiT\_f =

$$\frac{5.107e-05 s + 1.787e-05}{s^2 + 0.3499 s + 1.787e-05}$$

Continuous-time transfer function.

Determinazione dei poli e del guadagno statico di G\_QT(s)

poliG\_QTf = 2x1

-0.349835807383285  
-0.000051070000897

costditempoG\_QT = 2x1

10<sup>4</sup> x  
0.000285848383412  
1.958096695597084

$$G_Q^T(s) = \frac{0.002392}{(2.858 s + 1)(19580 s + 1)} \approx \frac{0.002392}{(19580 s + 1)}$$

gainG\_QTf =

0.002392344497608

Determinazione dello zero e del guadagno statico di G\_TiT(s)

zeriG\_TiT =

-0.349818531636713

gainG\_TiT =

1.000000000000000

$$G_{Ti}^T(s) = \frac{5.107 \cdot 10^{-5} (s + 0.3499)}{(s + 0.3499)(s + 0.00005107)} \approx \frac{5.107 \cdot 10^{-5}}{(s + 0.00005107)} = \frac{1}{19580 s + 1}$$

## ANALISI MODELLO IN VDS

**Attenzione:** il modello in VDS disponibile in Matlab non distingue gli ingressi manipolabili da quelli non manipolabili, e li accorpa in un unico vettore di ingresso  $\mathbf{u}$ .

La rappresentazione VDS in matlab del sistema ha pertanto la seguente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{ss}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{ss}\mathbf{u}(t)$$

dove

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} T(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} Q(t) \\ T_i(t) \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{A}$  è la stessa vista a lezione, la matrice  $\mathbf{B}_{ss}$  è invece una matrice 2x2 che "accorpa" le matrici  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{E}$  determinate a lezione.

$$\mathbf{B}_{ss} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{W}{m} \\ \frac{1}{m_r c_r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{ss} = [0 \quad 0]$$

```

A=[-(c*w+Ke*Am)/(m*c) Ke*Am/(m*c); Ke*Am/(mr*cr) -Ke*Am/(mr*cr)]
B=[0;1/(mr*cr)]
E=[w/m;0]
Bss=[B E]
C=[1 0];
Dss=[0 0];

```

```
AutovA=eig(A)
```

```

sys=ss(A,Bss,C,Dss);
sys.InputName = {'Q','Ti'};
sys.OutputName = {'T'};
sys.StateName = {'T','T_r'};
sys

```

```
TF=tf(sys)
```

```
G_QT=TF(1);
```

```
[N1 D1]=tfdata(G_QT,'v');
```

```
G_TiT=TF(2);
```

```
[N2 D2]=tfdata(G_TiT,'v');
```

**Attribuzione di label alle variabili di stato, di ingresso e di uscita**

**Calcolo automatico delle funzioni di trasferimento**

AutovA = 2x1

-0.000051070000897  
-0.349835807383285

## Autovalori di A

sys =

A =

		T	T_r
T	-6.835e-05	1.727e-05	
T_r	0.3498	-0.3498	

B =

		Q	Ti
T		0	5.107e-05
T_r	0.002474		0

C =

	T	T_r
T	1	0

D =

	Q	Ti
T	0	0

## Matrici del modello in VdS

TF =

From input "Q" to output "T":  
4.274e-08

-----  
s^2 + 0.3499 s + 1.787e-05

From input "Ti" to output "T":  
5.107e-05 s + 1.787e-05

-----  
s^2 + 0.3499 s + 1.787e-05

$$G_Q^T(s)$$

$$G_{T_i}^T(s)$$

Ora calcoliamo lo stato stazionario associato alla condizione:

Temperatura acqua in ingresso  $T_i(t) = \bar{T}_i = \text{cost.} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$

Temperatura (desiderata) acqua in uscita  $T(t) = \bar{T} = \text{cost.} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$

e mediante simulazione dinamica verifichiamo che il sistema evolve verso lo stato stazionario a partire da una qualunque condizione iniziale.

$$cW(\bar{T}_i - \bar{T}) + K_e A_m (\bar{T}_r - \bar{T}) = 0$$

$$\bar{Q} - K_e A_m (\bar{T}_r - \bar{T}) = 0$$



$$\bar{Q} = cW(\bar{T}_i - \bar{T}) = 12540 \text{ W}$$

$$\bar{T}_r = \bar{T} + \frac{\bar{Q}}{K_e A_m} = 148.7 \text{ }^\circ\text{C}$$

Nella simulazione dinamica usiamo le condizioni iniziali

$$T(0) = T_0 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$$

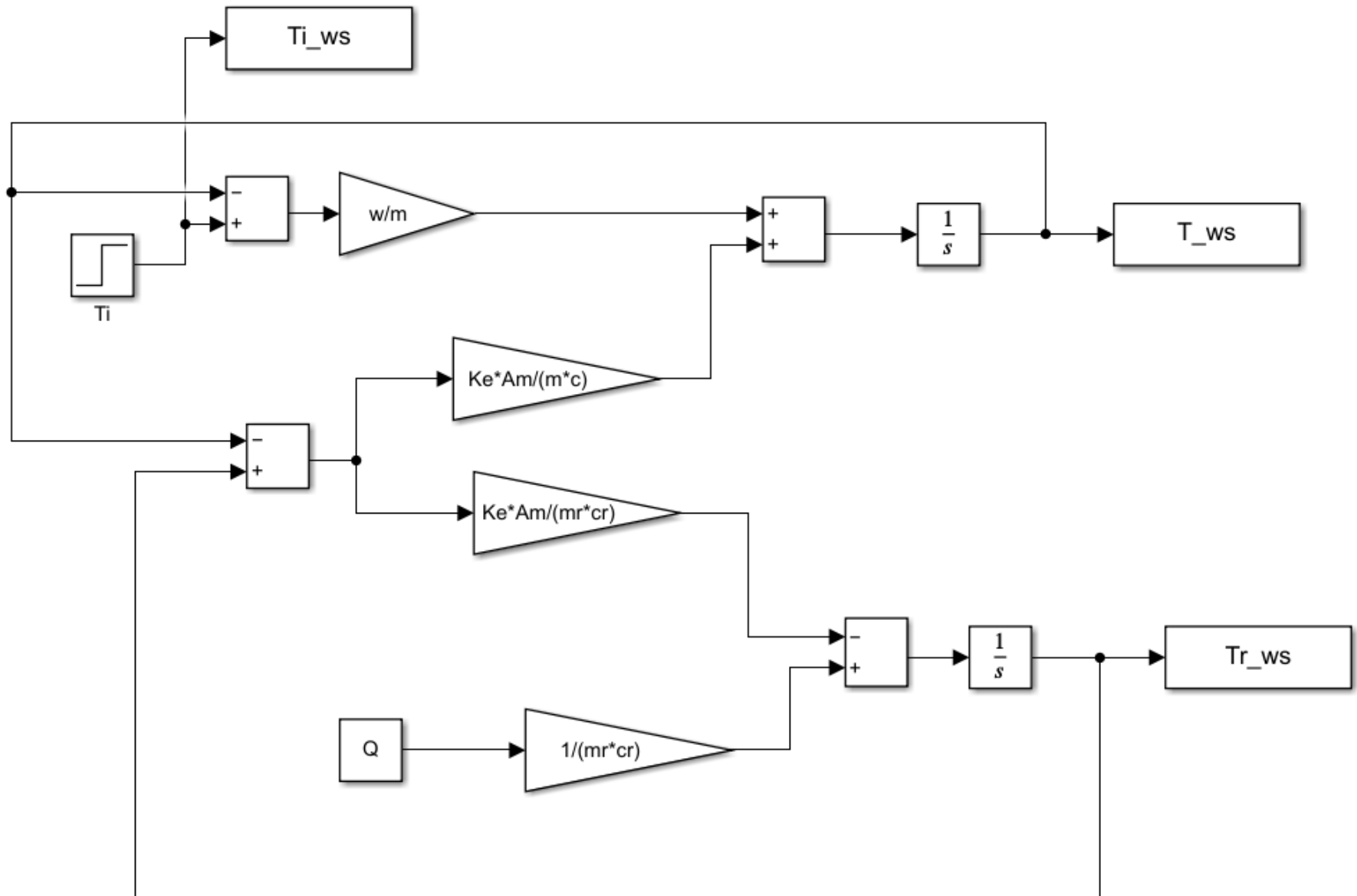
$$T_r(0) = T_{r0} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

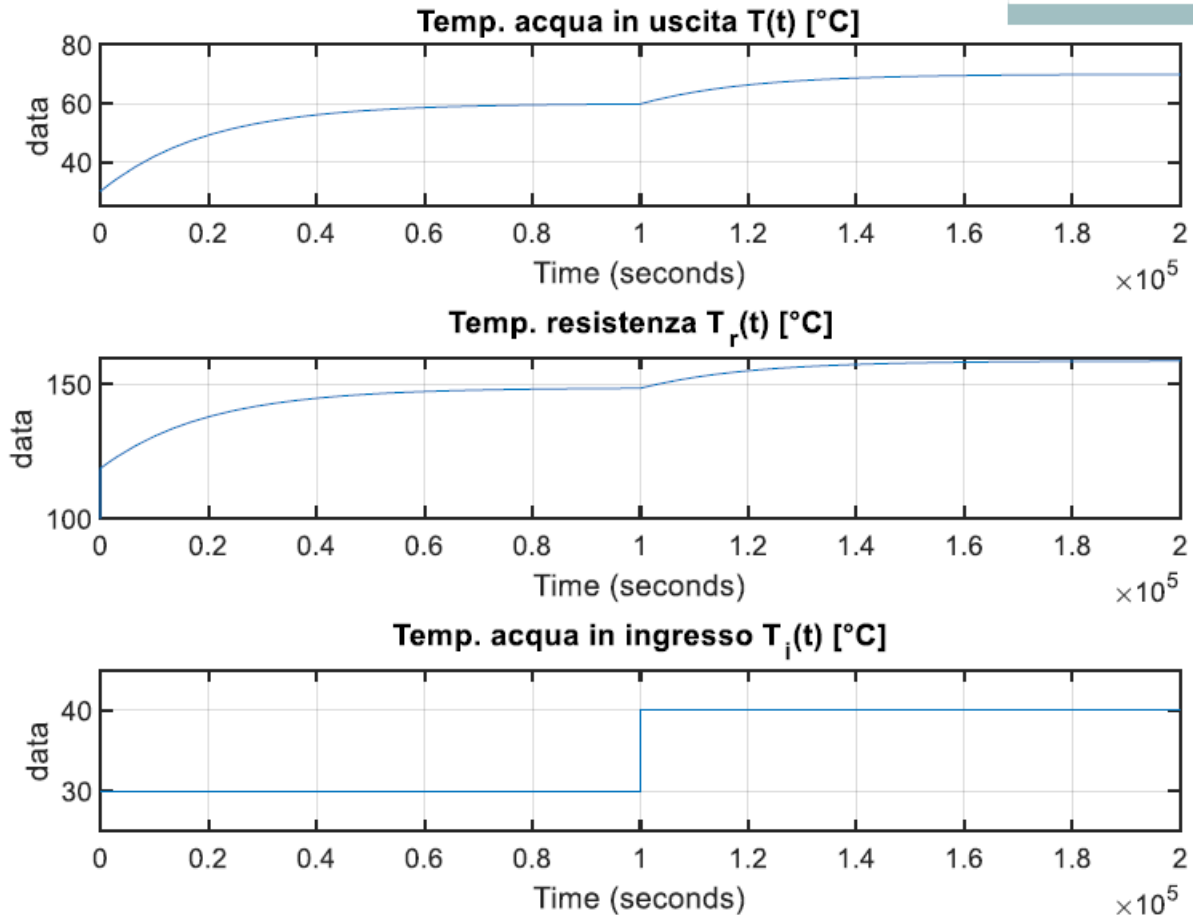
Applichiamo una potenza costante

$$Q(t) = \bar{Q} = \text{cost} = 12540 \text{ W}$$

e facciamo variare a gradino la temperatura dell'acqua in ingresso

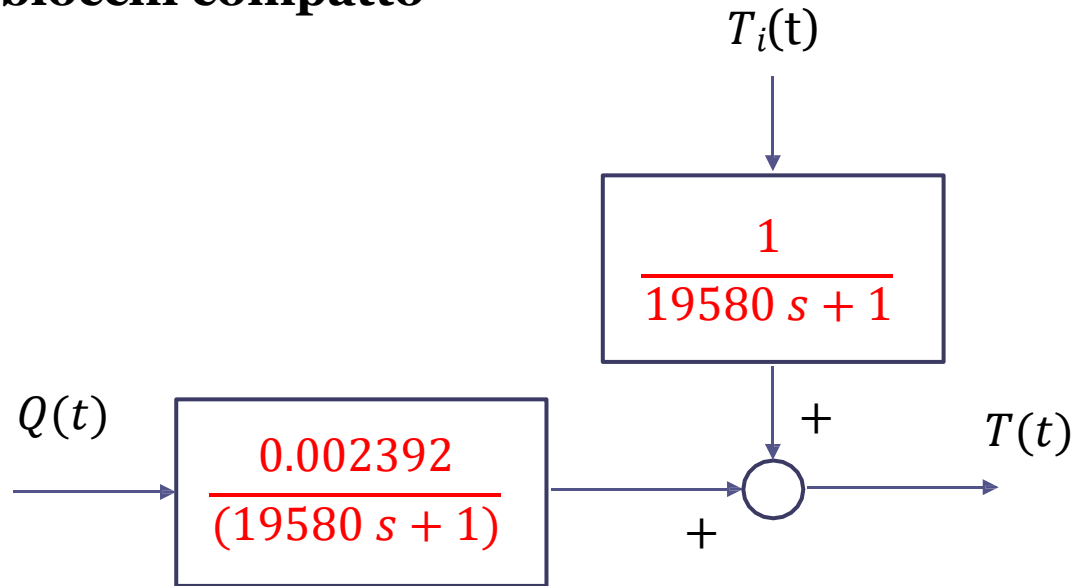
$$T_i(t) = \begin{cases} \bar{T} & 0 \leq t < 10^5 \\ \bar{T} + 10 & t \geq 10^5 \end{cases}$$





Al termine del primo transitorio (la cui durata è pari a 5 volte la costante di tempo dominante e pertanto circa pari a  $10^5$  secondi) le variabili  $T(t)$  e  $T_r(t)$  tendono ai valori desiderati/calcolati. La variazione di  $T_i$  a  $t = 10^5$  causa un nuovo transitorio, di pari durata, verso una nuova condizione di regime.

## Schema a blocchi compatto



Opzioni per la regolazione:

Controllo ad anello singolo

Controllo in cascata

Compensazione dei disturbi misurabili

## Discretizzazione **esatta** di un sistema lineare a tempo continuo espresso in variabili di stato

Ricaviamo il modello a tempo discreto che descrive **in maniera esatta** l'evoluzione delle variabili di stato del modello lineare in VdS a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

**negli istanti di campionamento**, sotto l'**ipotesi** che il segnale di ingresso  $\mathbf{u}(t)$  sia un segnale **costante a tratti**

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(k)$$

$$kT_c \leq t < (k+1)T_c$$

Dopo qualche passaggio si ottiene

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d u(k)$$

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T_c}$$

Matlab: `Ad=expm(A*Tc)`

$$\mathbf{B}_d = \int_0^{T_c} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau$$

Se la matrice  $\mathbf{A}$  è invertibile (cioè se non ha autovalori nulli) la matrice di controllo  $\mathbf{B}_d$  può essere espressa in forma chiusa attraverso la formula:

$$\mathbf{B}_d = (\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

L'espressione della uscita negli istanti di campionamento si ottiene banalmente partendo dalla trasformazione in uscita del sistema a tempo continuo:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

e valutandola negli istanti di campionamento

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

Le matrici C e D del modello a tempo discreto sono pertanto coincidenti con quelle del modello a tempo continuo

## Esempio: Reattore con mescolamento e riscaldamento (continua)

```
Tc=0.05; % periodo di campionamento
sys_TD=c2d(sys,Tc); % funzione c2d=continuous-to-discrete
[Ad,Bd,Cd,Dd]=ssdata(sys_TD)
```

```
Ad = 2×2
    0.999996590227721    0.000000856150487
    0.017338818611243    0.982661159185777
```

```
Bd = 2×2
10-3 ×
    0.000000053117176    0.002553621792301
    0.122647263031270    0.000022202979606
```

```
Cd = 1×2
    1    0
```

```
Dd = 1×2
    0    0
```

# Linearizzazione di un sistema non lineare ( $n=m=p=r=1$ )

Mediante linearizzazione, a partire da un modello matematico non lineare si determina una sua approssimazione lineare che consente di approssimare il comportamento del sistema originario in un intorno di un **punto di equilibrio**

Trattiamo preliminarmente il problema della linearizzazione di un modello in variabili di stato del primo ordine ( $n=1$ ) con ingresso manipolabile scalare ( $m=1$ ) uscita scalare ( $p=1$ ) e disturbo anch'esso scalare ( $r=1$ )

EQUAZIONE DI STATO  $\dot{x}(t) = f(x, u, d) \quad x, u, d, y \in \mathfrak{R}$

TRASFORMAZIONE  
IN USCITA  $y(t) = h(x, u, d)$

Il passo preliminare è individuare un **punto di equilibrio** in corrispondenza del quale determinare il modello linearizzato

Siano  $x^*, u^*, d^* \in \mathfrak{R}$

**valori di equilibrio** tali che

$$f(x^*, u^*, d^*) = 0$$

Il modello linearizzato è **espresso in funzione delle seguenti variabili**

$\delta x(t) = x(t) - x^*$	Stato del modello linearizzato
$\delta u(t) = u(t) - u^*$	Ingresso del modello linearizzato
$\delta d(t) = d(t) - d^*$	Disturbo del modello linearizzato
$\delta y(t) = y(t) - y^*$	Uscita del modello linearizzato
$= y(t) - h(x^*, u^*, d^*)$	

Il **modello linearizzato** assume la forma seguente

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}(t) &= a\delta x + b\delta u + e\delta d \\ \delta y(t) &= c\delta x + d\delta u + q\delta d\end{aligned}$$

$$a, b, e, c, d, q \in \mathfrak{R}$$

$a, b, e, c, d, q$  sono delle **costanti** che si determinano come segue

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^* \\ d=d^*}}$$

$$b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^* \\ d=d^*}}$$

$$e = \left. \frac{\partial f}{\partial d} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^* \\ d=d^*}}$$

$$c = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^* \\ d=d^*}}$$

$$d = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^* \\ d=d^*}}$$

$$q = \left. \frac{\partial h}{\partial d} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^* \\ d=d^*}}$$

Modello originario non lineare:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u, d) \\ y(t) &= h(x, u, d)\end{aligned}$$

## Notazione semplificata per le costanti del modello

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= a\delta x + b\delta u + e\delta d \\ \delta y(t) &= c\delta x + d\delta u + q\delta d\end{aligned}$$

$$a, b, e, c, d, q \in \mathfrak{R}$$

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{EQ}$$

$$b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{EQ}$$

$$e = \left. \frac{\partial f}{\partial d} \right|_{EQ}$$

$$c = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{EQ}$$

$$d = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{EQ}$$

$$q = \left. \frac{\partial h}{\partial d} \right|_{EQ}$$

Nell'interpretare i segnali restituiti dal modello linearizzato, ed in particolare nell'operare un confronto con i segnali derivanti dal modello originario non lineare, **si presti attenzione al fatto che il modello linearizzato è espresso in termini delle «variabili differenza»**

$$\delta x(t) = x(t) - x^*$$

$$\delta u(t) = u(t) - u^*$$

$$\delta d(t) = d(t) - d^*$$

$$\delta y(t) = y(t) - y^*$$

e per risalire ai segnali originari devono pertanto essere considerate le relazioni inverse

$$x(t) = \delta x(t) + x^*$$

$$u(t) = \delta u(t) + u^*$$

$$d(t) = \delta d(t) + d^*$$

$$y(t) = \delta y(t) + y^*$$

Nella maggioranza dei casi pratici, la trasformazione in uscita  $y(t) = h(x, u, d)$  dipende solo dallo stato  $x$ :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, d)$$

$$y(t) = h(x)$$

Il modello linearizzato assume la **forma semplificata**

$$\delta\dot{x}(t) = a\delta x + b\delta u + e\delta d \quad a, b, e, c, \in \mathfrak{R}$$

$$\delta y(t) = c\delta x$$

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{EQ}$$

$$b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{EQ}$$

$$e = \left. \frac{\partial f}{\partial d} \right|_{EQ}$$

$$c = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{EQ}$$

Prima di sviluppare un primo esempio, generalizziamo al caso di un sistema in cui intervengono **due variabili disturbanti**  $d_1$  e  $d_2$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u, d_1, d_2) & x, u, d_1, d_2, y &\in \mathfrak{R} \\ y(t) &= h(x)\end{aligned}$$

**Punto di equilibrio:**  $x^*, u^*, d_1^*, d_2^* \in \mathfrak{R}$  tale che  $f(x^*, u^*, d_1^*, d_2^*) = 0$

*Variabili del modello linearizzato*

$$\delta x(t) = x(t) - x^*$$

Stato del modello linearizzato

$$\delta u(t) = u(t) - u^*$$

Ingresso del modello linearizzato

$$\delta d_1(t) = d_1(t) - d_1^*$$

Disturbi del modello linearizzato

$$\delta d_2(t) = d_2(t) - d_2^*$$

$$\delta y(t) = y(t) - y^* = y(t) - h(x^*)$$

Uscita del modello linearizzato

## modello linearizzato

$$\delta \dot{x}(t) = a\delta x + b\delta u + e_1\delta d_1 + e_2\delta d_2$$

$$\delta y(t) = c\delta x$$

## coefficienti del modello

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{EQ} \quad b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{EQ} \quad e_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial d_1} \right|_{EQ} \quad e_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial d_2} \right|_{EQ}$$

$$c = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{EQ}$$

Modello originario non lineare:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, d_1, d_2)$$

$$y(t) = h(x)$$

## Funzioni di trasferimento del modello linearizzato

Al modello linearizzato

$$\delta \dot{x}(t) = a\delta x + b\delta u + e_1\delta d_1 + e_2\delta d_2$$

$$\delta y(t) = c\delta x$$

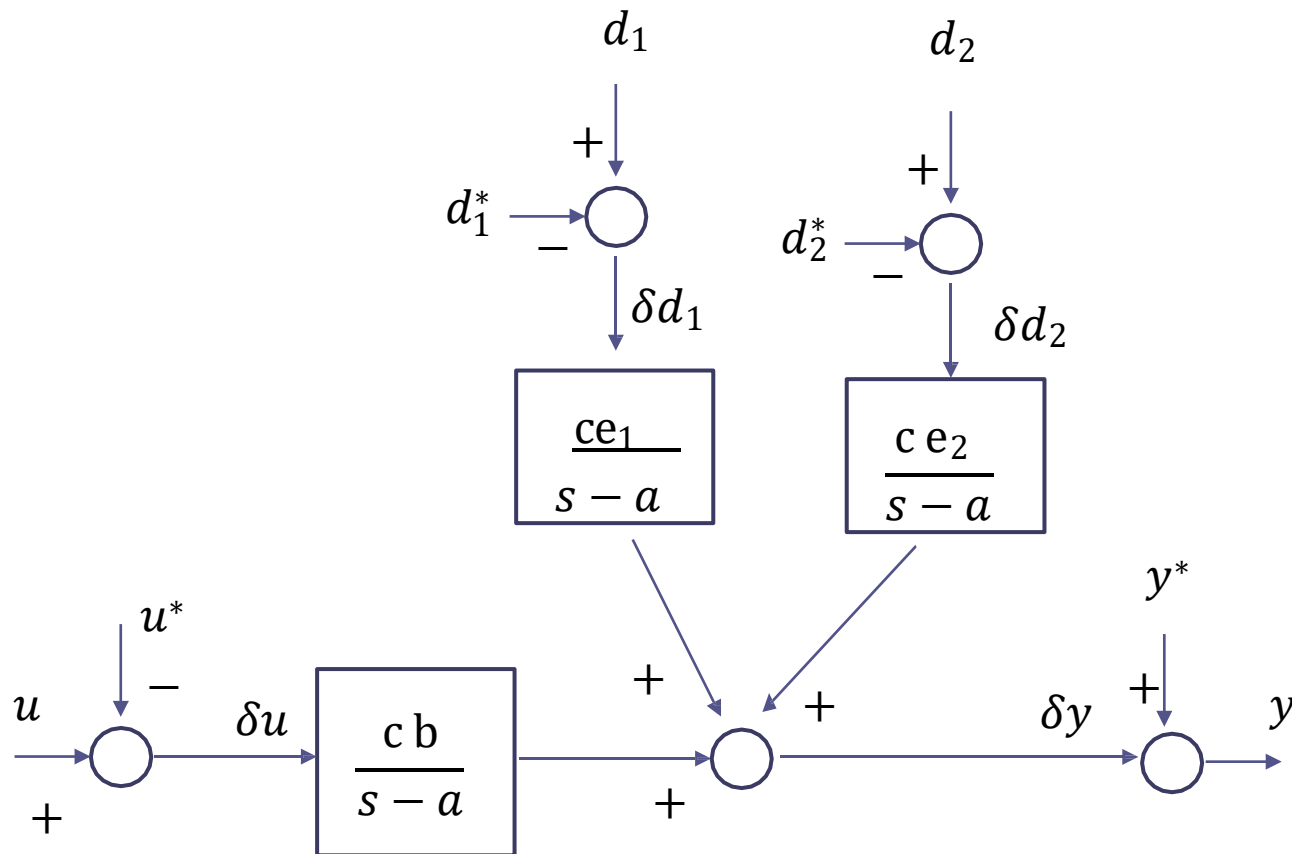
si associano le funzioni di trasferimento

$$G_{\delta u}^{\delta y}(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{cb}{s-a}$$

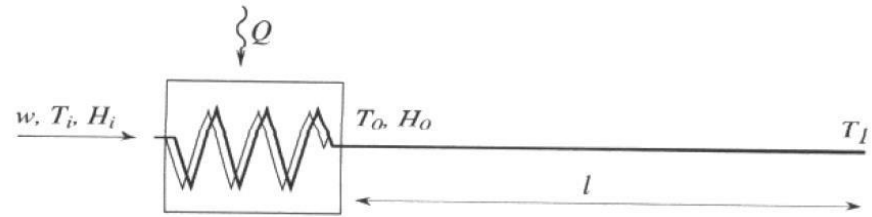
$$G_{\delta d_1}^{\delta y}(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta D_1(s)} = \frac{ce_1}{s-a}$$

$$G_{\delta d_2}^{\delta y}(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta D_2(s)} = \frac{ce_2}{s-a}$$

## Schema a blocchi del modello linearizzato



## Esempio di applicazione



$$mc \frac{dT_0(t)}{dt} = cw(t)(T_i(t) - T_0(t)) + Q(t) \quad (1)$$

$$T_1(t) = T_0\left(t - \frac{M}{w(t)}\right) \quad (2)$$

Riscriviamo la (1) in forma esplicita

$$\frac{dT_0(t)}{dt} = \frac{1}{m} w(t)(T_i(t) - T_0(t)) + \frac{1}{mc} Q(t) \quad (3)$$

**Modello non lineare del primo ordine** (n=1):

variabile di stato  $x = T_0$ ,

Ingresso manipolabile  $u = w$

disturbi  $d_1 = T_i$        $d_2 = Q$ ,

variabile di uscita  $y = T_1$ ,

**Parametri**

m    c    M

Equazione (3) in forma compatta

$$\frac{dT_0(t)}{dt} = f(T_0, w, Q, T_i)$$

$$f(T_0, w, Q, T) = \frac{1}{m} w(t)(T_i(t) - T_0(t)) + \frac{1}{mc} Q(t) \quad (4)$$

L'insieme dei **punti di equilibrio in stato stazionario** soddisfa la seguente relazione

$$f(T_0^*, w^*, Q^*, T_i^*) = \frac{1}{m} w^* (T_i^* - T_0^*) + \frac{1}{m} Q^* = 0$$

Da cui si ricava

$$T_0^* = T_i^* + \frac{Q^*}{w^* c}$$

Fissate 3 fra le quantità  $T_0^*, w^*, Q^*, T_i^*$ , la quarta si determina in accordo con la equazione precedente

Calcoliamo le derivate parziali della funzione  $f$

$$f(T_0, w, Q, T_i) = \frac{1}{m} w (T_i - T_0) + \frac{1}{mc} Q$$

che servono per determinare i coefficienti del modello linearizzato.

$$\frac{\partial f}{\partial T_0} = -\frac{1}{m} w$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{T_i - T_0}{m}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q} = \frac{1}{mc}$$

$$\frac{\partial f}{\partial T_i} = \frac{1}{m} w$$

## Variabili del modello linearizzato

$$\delta T_0(t) = T_0(t) - T_0^*$$

Stato del modello linearizzato

$$\delta w(t) = w(t) - w^*$$

Ingresso del modello linearizzato

$$\delta Q(t) = Q(t) - Q^*$$

Disturbi del modello linearizzato

$$\delta T_i(t) = T_i(t) - T_i^*$$

## Modello linearizzato

$$\frac{d\delta T_0(t)}{dt} = a \delta T_0(t) + b \delta w(t) + e_1 \delta Q(t) + e_2 \delta T_i(t)$$

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial T_0} \right|_{EQ} = -\frac{1}{m} w^*$$

$$b = \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{EQ} = \frac{T_i^* - T_0^*}{m}$$

$$e_1 = \frac{\partial f}{\partial Q} = \frac{1}{mc}$$

$$e_2 = \frac{\partial f}{\partial T_i} = \frac{1}{m} w^*$$

$$\frac{d\delta T_0(t)}{dt} = -\frac{1}{m} w^* \delta T_0(t) + \frac{T_i^* - T_0^*}{m} \delta w(t) + \frac{1}{mc} \delta Q(t) + \frac{1}{m} w^* \delta T_i(t)$$

## Funzioni di trasferimento del modello linearizzato

Al modello linearizzato

$$\frac{d}{dt} \delta T_0(t) = -\frac{w^*}{m} \delta T_0(t) + \frac{T_i^* - T_0^*}{m} \delta w(t) + \frac{1}{mc} \delta Q(t) + \frac{w^*}{m} \delta T_i(t)$$

si associano le funzioni di trasferimento STC (Single Time Constant)

$$G_{\delta w}^{\delta T_0}(s) = G_1(s) = \frac{\Delta T_0(s)}{\Delta W(s)} = \frac{\frac{T_i^* - T_0^*}{m}}{s + \frac{w^*}{m}} = \frac{T_i^* - T_0^*}{w^*} \frac{1}{\frac{m}{w^*} s + 1} = \frac{K_1}{\tau s + 1}$$

$$G_{\delta Q}^{\delta T_0} = G_2(s) = \frac{\Delta T_0(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{\frac{1}{mc}}{s + \frac{w^*}{m}} = \frac{1}{cw^*} \frac{1}{\frac{m}{w^*} s + 1} = \frac{K_2}{\tau s + 1}$$

$$G_{\delta T_i}^{\delta T_0} = G_3(s) = \frac{\Delta T_0(s)}{\Delta T_1(s)} = \frac{\frac{w^*}{m}}{s + \frac{w^*}{m}} = \frac{1}{\frac{m}{w^*} s + 1} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$G_{\delta w}^{\delta T_0}(s) = G_1(s) = \frac{K_1}{rs + 1}$$

$$K_1 = \frac{T_i^* - T_0^*}{w^*}$$

$$r = \frac{m}{w^*}$$

$$G_{\delta Q}^{\delta T_0} = G_2(s) = \frac{K_2}{rs + 1}$$

$$K_2 = \frac{1}{cw^*}$$

$$G_{\delta T_i}^{\delta T_0} = G_3(s) = \frac{1}{rs + 1}$$

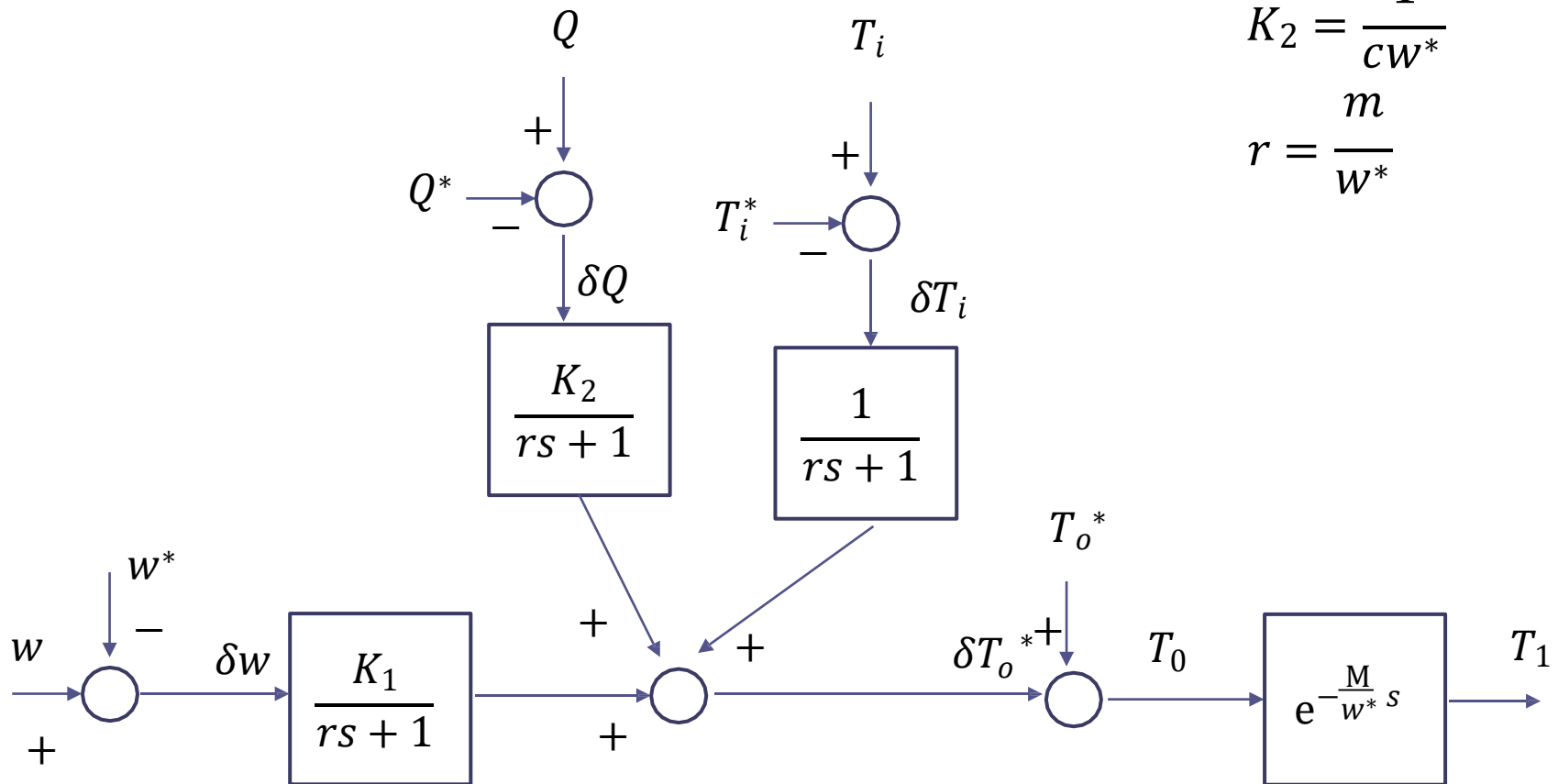
Al legame fra  $T_1$  e  $T_0$

$$T_1(t) = T_0 \left( t - \frac{M}{w} \right)$$

valutato in corrispondenza del punto di equilibrio  $w = w^*$  associamo la funzione di trasferimento

$$G_{T_0}^{T_1}(s) = G_4(s) = \frac{T_1(s)}{T_0(s)} = e^{-\frac{M}{w^*} s}$$

## Schema a blocchi del modello linearizzato



$$K_1 = \frac{T_i^* - T_0^*}{w^*}$$

$$K_2 = \frac{1}{cw^*}$$

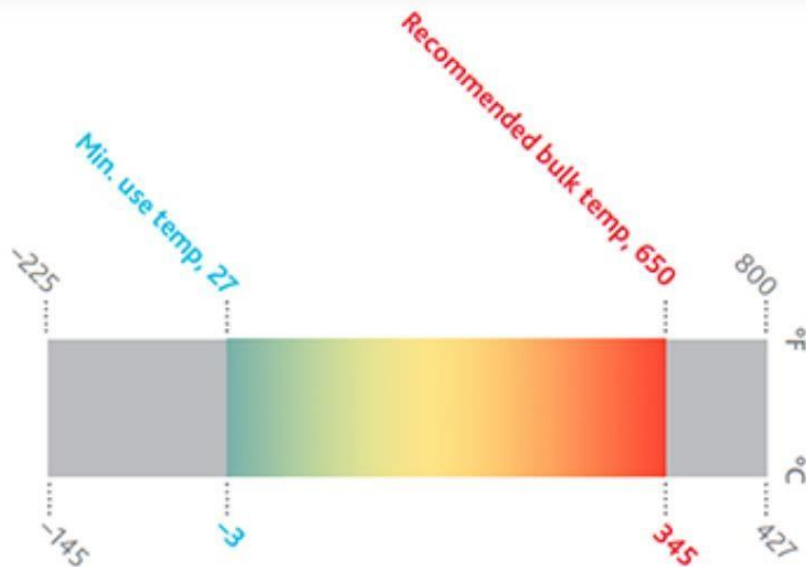
$$r = \frac{m}{w^*}$$

## Consideriamo un problema concreto e realizziamo alcune simulazioni

Fluido di processo: Therminol 66 (olio diatermico)

### Therminol 66 Heat Transfer Fluid

Therminol 66 is the world's most popular high temperature, liquid-phase heat transfer fluid. Therminol 66 is pumpable at low temperatures, and offers high-temperature thermal stability.



**File:** ScambiatoreFlussoImposto\_live.mlx

## Temperature desiderate di esercizio

$$T_i^* = 200 \text{ } ^\circ\text{C} = 473.15 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$T_o^* = 250 \text{ } ^\circ\text{C} = 523.15 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$c = 2.3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^\circ\text{K}} \quad (\text{a } 230 \text{ } ^\circ\text{C})$$

## Potenza trasferita al fluido

$$Q^* = 92000 \text{ W} = 92 \text{ kW}$$

## Portata nominale di esercizio

$$T_o^* = T_i^* + \frac{Q^*}{w^* c} \quad \Rightarrow \quad w^* = \frac{Q^*}{c(T_o^* - T_i^*)} = 0.8 \text{ kg/s}$$

**Il fluido scorre in una tubazione con diametro**

$$D = 10 \text{ cm} \qquad \text{sezione: } S = \frac{\pi D^2}{4} = 0.0079 \text{ m}^2$$

**Il tratto di tubazione in cui avviene lo scambio termico ha lunghezza**

$$L = 1 \text{ m}$$

**Volume del fluido nella zona di scambio termico**

$$V = S L = \frac{\pi D^2}{4} L = 0.0079 \text{ m}^3$$

**Densità e calore specifico del Therminol 66 (a 230 °C )**

$$\rho = 863 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \qquad c = 2300 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

**Massa del fluido nella zona di scambio termico**

$$m = \rho V = 6.77 \text{ kg}$$

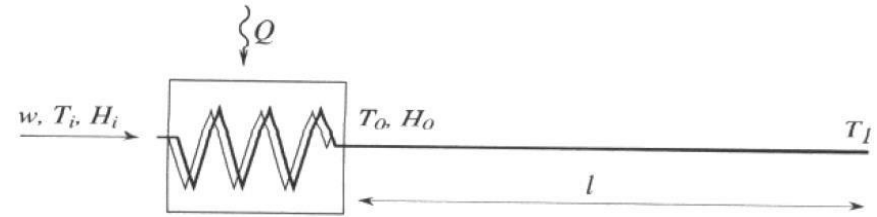
## Parametri tubazione a valle

$$D_2 = 5 \text{ cm} \quad \text{Diametro}$$

$$L_2 = 10 \text{ m} \quad \text{Lunghezza}$$

$$\text{sezione: } S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = 0.0019 \text{ m}^2$$

$$\text{volume di fluido: } V_2 = S_2 L_2 = 0.019 \text{ m}^3$$



## Massa del fluido nella tubazione a valle

$$M = \rho V_2 = 16.94 \text{ kg}$$

## Ritardo nominale

$$\bar{\delta} = \frac{M}{w^*} = 21.18 \text{ s}$$

```
clear all, close all, clc
```

```
% Temperature desiderate per il fluido in stato stazionario
```

```
Tieq=200; %°C
```

```
T0eq=250; %°C
```

```
% Potenza istantanea trasferita al fluido
```

```
Qeq=92000;
```

```
c=2.3e3; %[J/kg °K] , a 230°C calore specifico del Therminol 66.
```

```
weq=Qeq/(c*(T0eq-Tieq)) % kg/s
```

```
D=0.1; %Diametro tubazione
```

```
L=1; %Lunghezza zona di scambio
```

```
S=pi*D^2/4; %sezione tubazione [m^2]
```

```
V=S*L
```

```
rho=863; %kg/m^3
```

```
disp('Massa di fluido nella zona di scambio [kg]:')
```

```
m=rho*V
```

```
disp('Costante di tempo:')
```

```
tau=m/weq
```

```
K1=(Tieq-T0eq)/weq
```

```
K2=1/(c*weq)
```

```
%Parametri tubazione a valle
```

```
L2=10;
```

```
D2=0.05;
```

```
S2=pi*D2^2/4
```

```
V2=S2*L2
```

```
disp('Massa di fluido nella tubazione a valle della zona di scambio [kg]:')
```

```
M=rho*V2
```

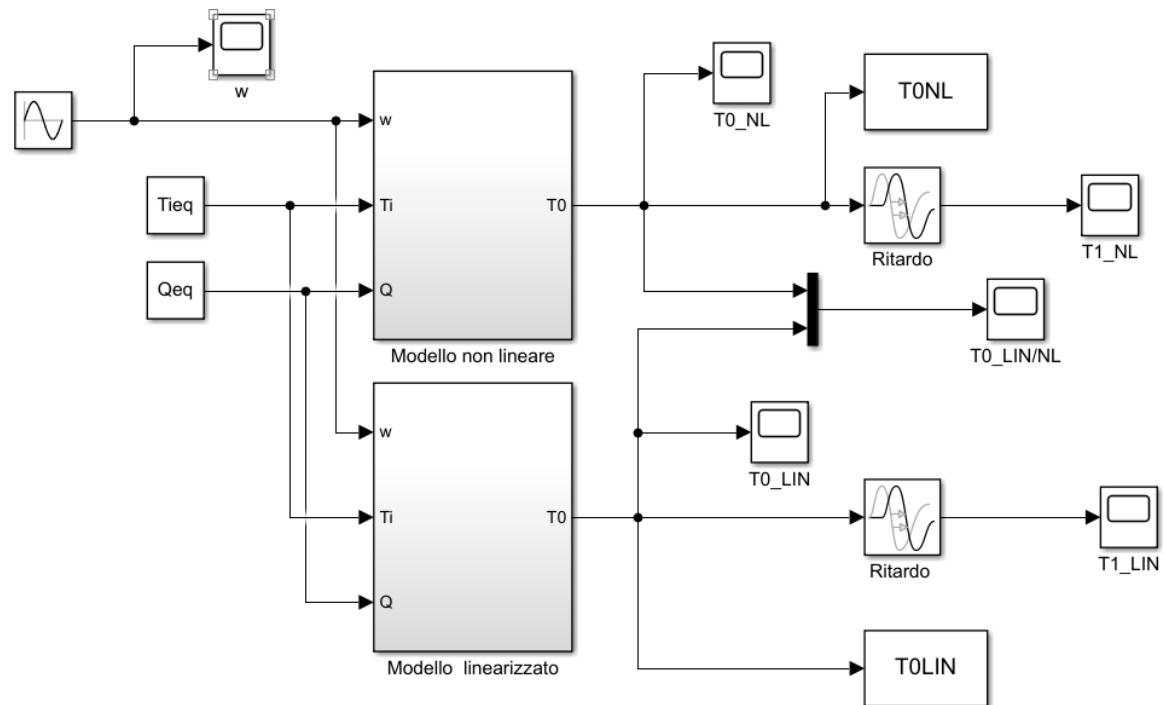
```
disp('Ritardo:')
```

```
delta=M/weq
```

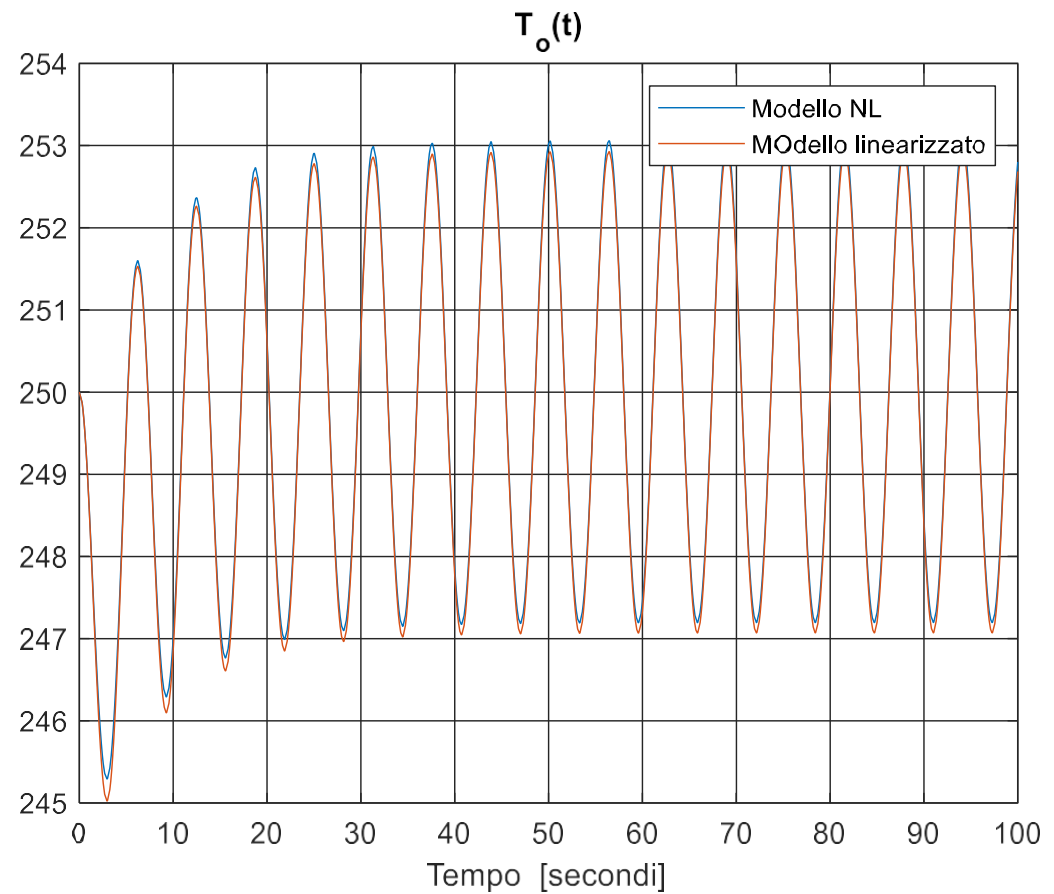
Eseguiamo un primo test in cui la portata  $w(t)$  viene variata con andamento sinusoidale intorno al valore di regime

$$w(t) = w^* + \frac{1}{2} w^* \sin(t)$$

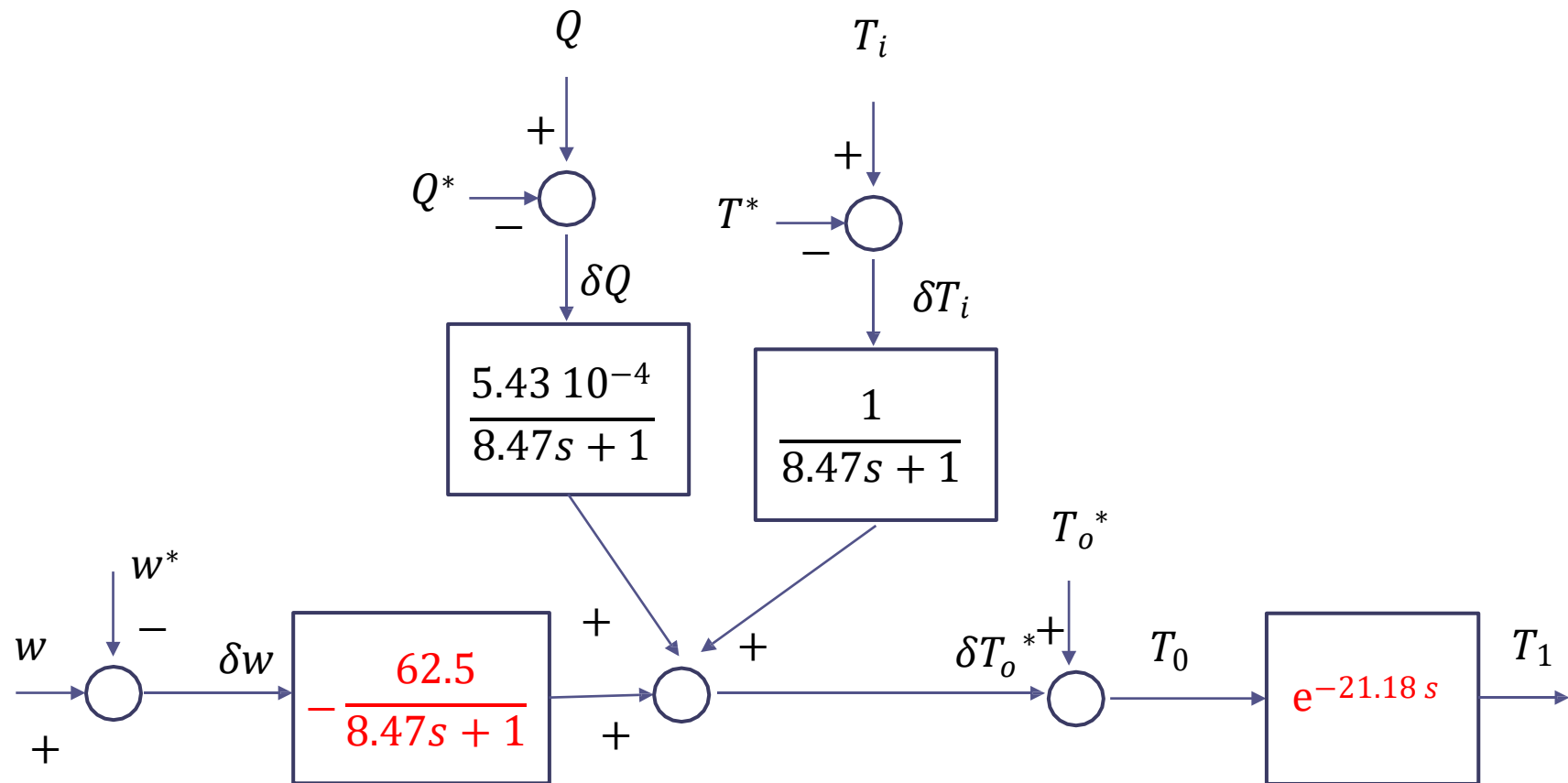
Confrontiamo la risposta del modello non lineare con la risposta del modello linearizzato



```
sim('modello_scambiatoreFlussoImposto_wsin')
figure(1)
plot(T0NL.time, [T0NL.data T0LIN.data])
legend('Modello NL', 'MModelo linearizzato')
title('T_o(t)')
xlabel('Tempo [secondi]'), grid
```



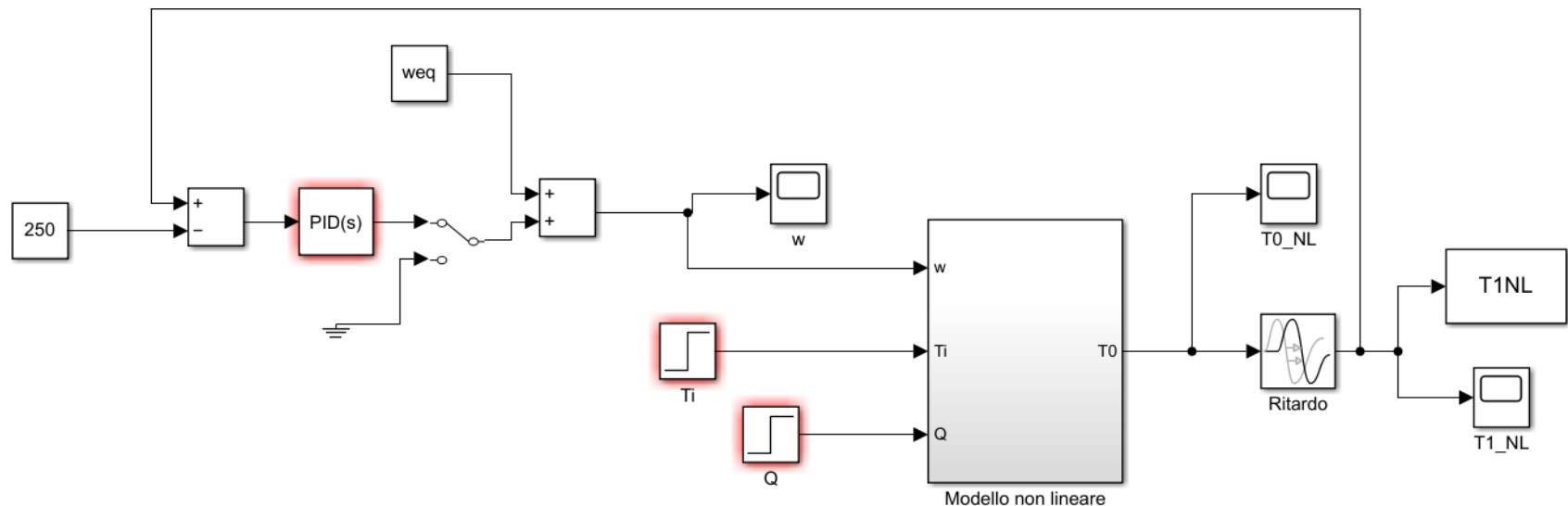
Ora progettiamo un sistema di controllo con regolatore PI sulla base del modello linearizzato.



Processo compressivo linearizzato: 
$$P(s) = -\frac{62.5}{8.47s + 1} e^{-21.18s}$$

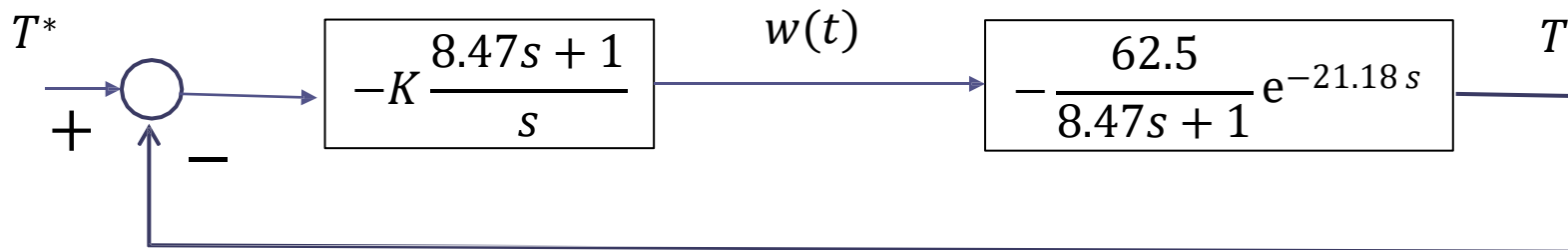
NB Il processo  $P(s)$  ha **guadagno statico negativo** (un aumento della variabile manipolabile causa una diminuzione della variabile controllata).

I guadagni del controllore dovranno pertanto essere negativi (o in alternativa si applica in ingresso al controllore il segnale USCITA – SET POINT anzichè come al solito SET POINT – USCITA )



**File:** `modello_scambiatoreFlussoImposto_PI.slx`

Nelle simulazioni saranno applicate delle variazioni a gradino della temperatura in ingresso  $T_i$  e della potenza  $Q$  per verificare il buon funzionamento del sistema di controllo progettato.

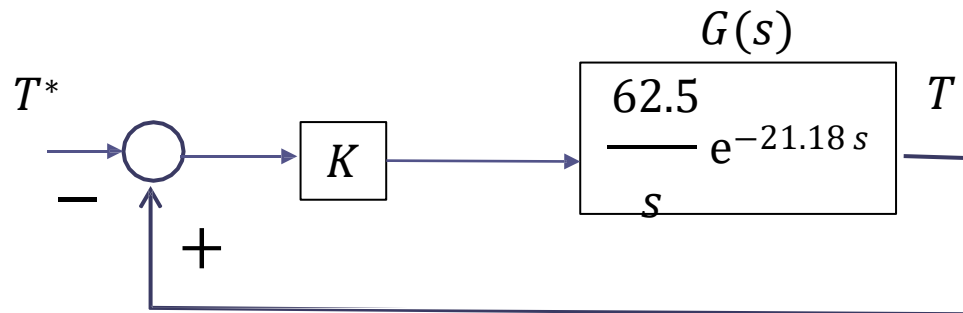


Ricerchiamo un controllore che stabilizza il sistema (linearizzato) a ciclo chiuso ponendo a frutto il Criterio di Bode.

Ipotizziamo un **controllore PI il cui zero è sovrapposto al polo del processo**.

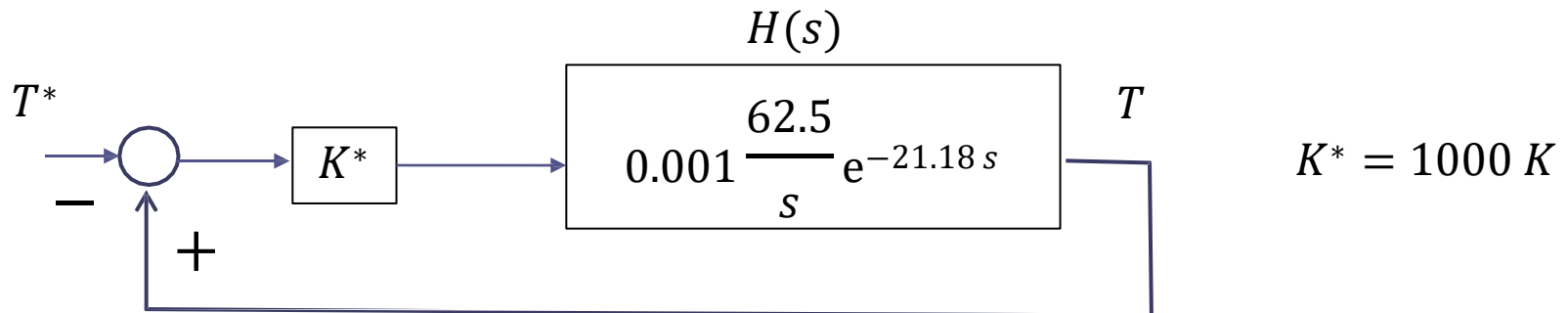
Determiniamo l'intervallo di valori utili per il guadagno  $K$  applicando il metodo, visto nel corso di Controlli Automatici, per mezzo del quale si determina il guadagno critico.

$$PI(s) = -\frac{K_p s + K_i}{s} = -K \frac{\frac{K_p}{K} s + 1}{s} = -K \frac{8.47s + 1}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} K_i &= K \\ \frac{K_p}{K_i} &= 8.47 & K_p &= 8.47 K_i \end{aligned}$$



Il guadagno critico coincide con il margine di guadagno della FdT  $G(s) = \frac{62.5}{s} e^{-21.18s}$

Per motivi numerici, inseriamo nel processo un guadagno aggiuntivo pari a  $10^{-3}$ , compensandolo con un guadagno inverso nel controllore



Valutiamo il guadagno critico  $K_{cr}^*$  e poi deriviamo il valore critico per il guadagno  $K$  del regolatore mediante la formula:  $K_{cr} = K_{cr}^* / 1000$

```
s=tf('s');
GwT1=K1*exp(-s*delta)/(tau*s+1)
```

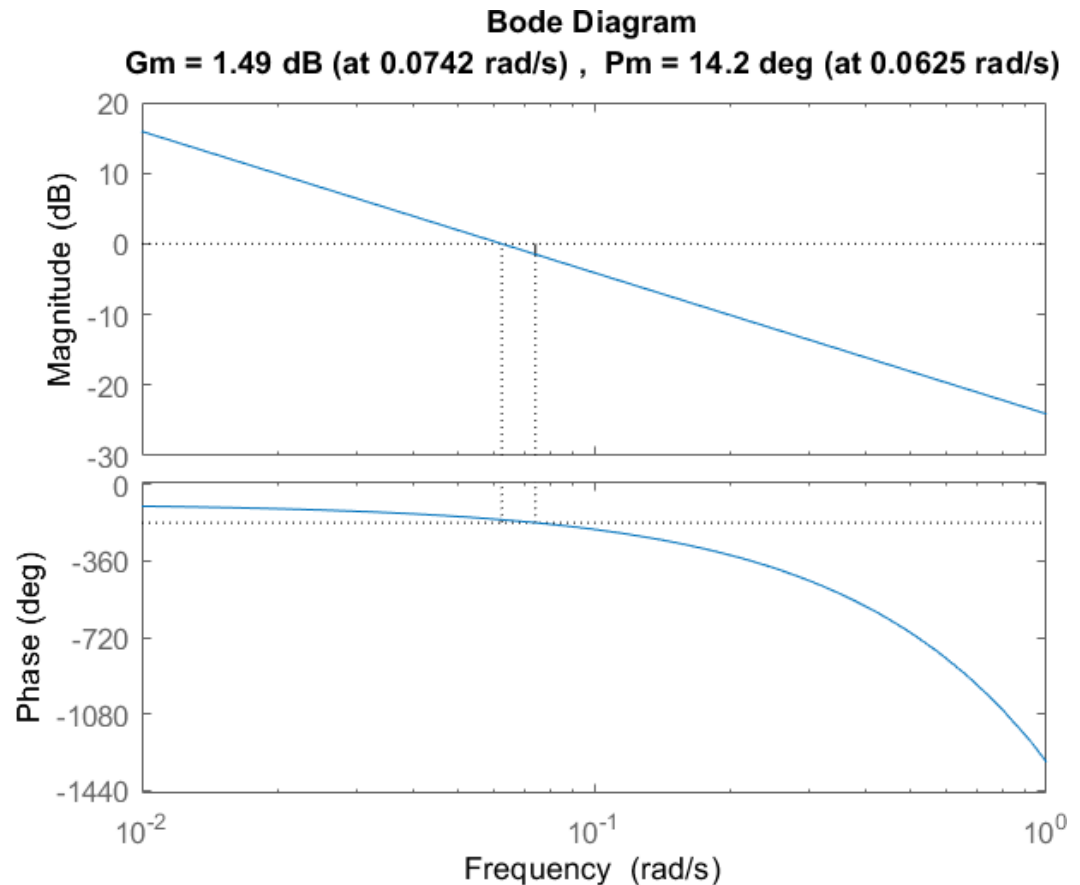
```
% Ipotizziamo un regolatore PI che cancelli con il proprio zero
% il polo del processo. Il regolatore PI deve avere guadagni negativi
% perchè K1<0.
% Calcoliamo il guadagno critico.
```

```
R=-(tau*s+1)/s
H=0.001*R*GwT1;
[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(H)
margin(H)
```

```
kcritico=Gm/1000
```

$$G_m = K_c^* = 10^{\frac{1.49}{20}} = 1.187$$

$$K_c = \frac{K_{cr}^*}{1000} = 0.00187$$



```
%coppia di guadagni che assicura la stabilità
Ki=0.8*kcritico
Kp=tau*Ki

% a t=50 la temperatura del fluido viene incrementata a gradino di 5 gradi
deltaTi=5;

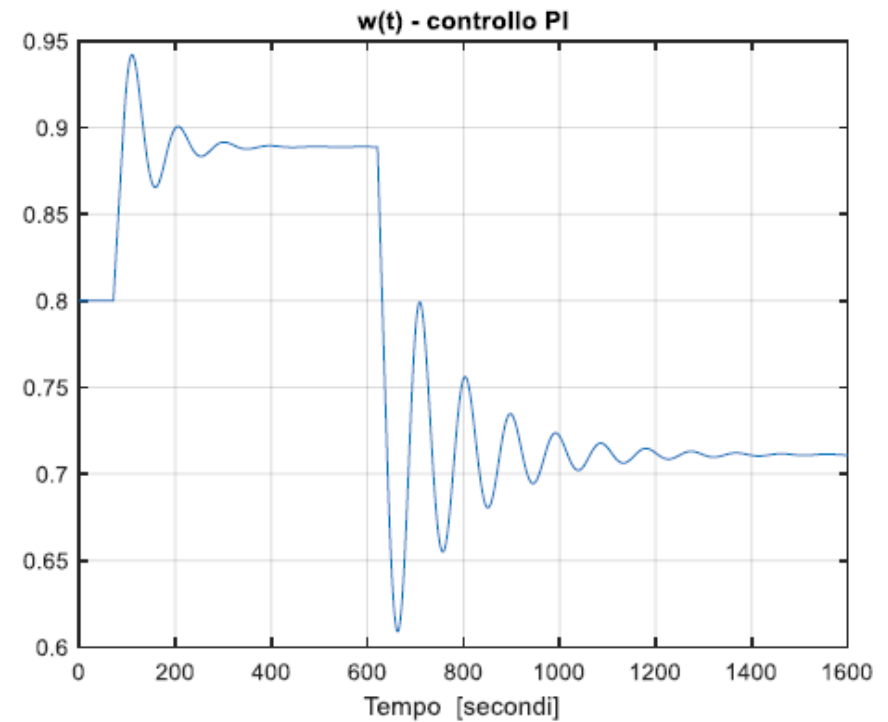
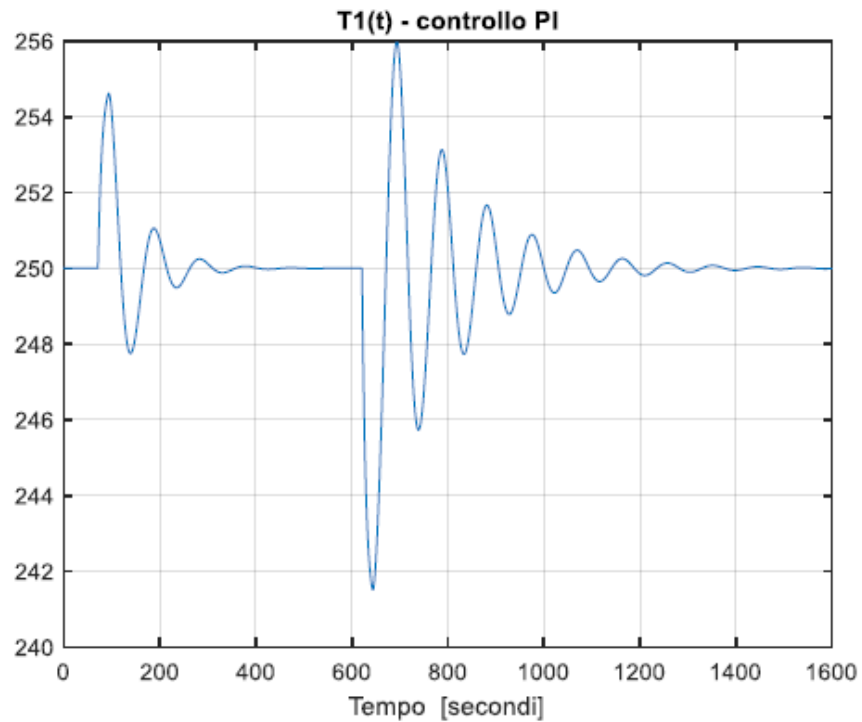
% a t=600 la potenza Q viene ridotta a gradino del 20%
Qfin=0.8*Qeq;

sim('modello_scambiatoreFlussoImposto_PI')

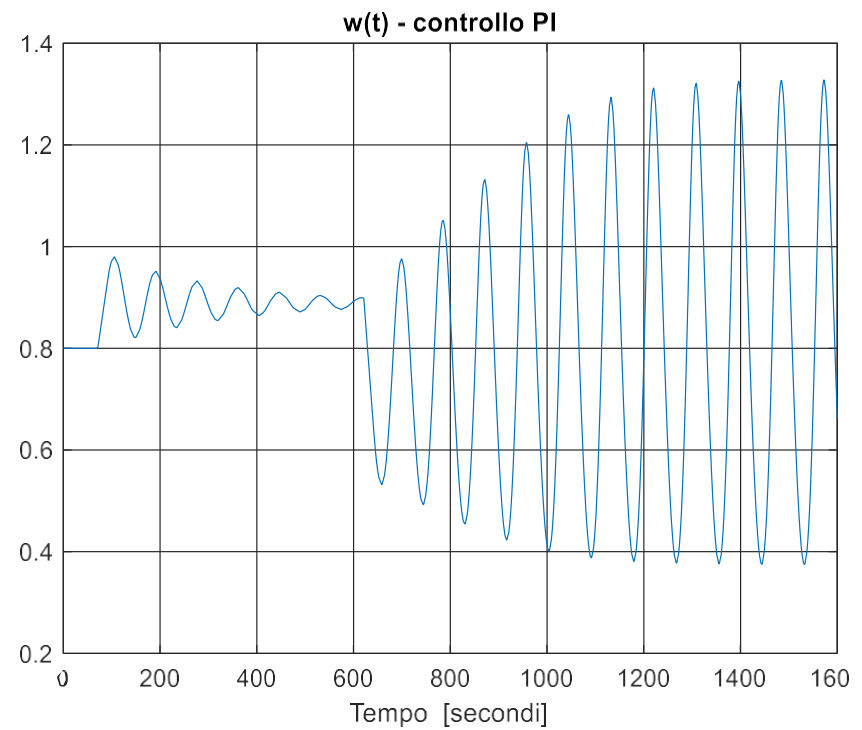
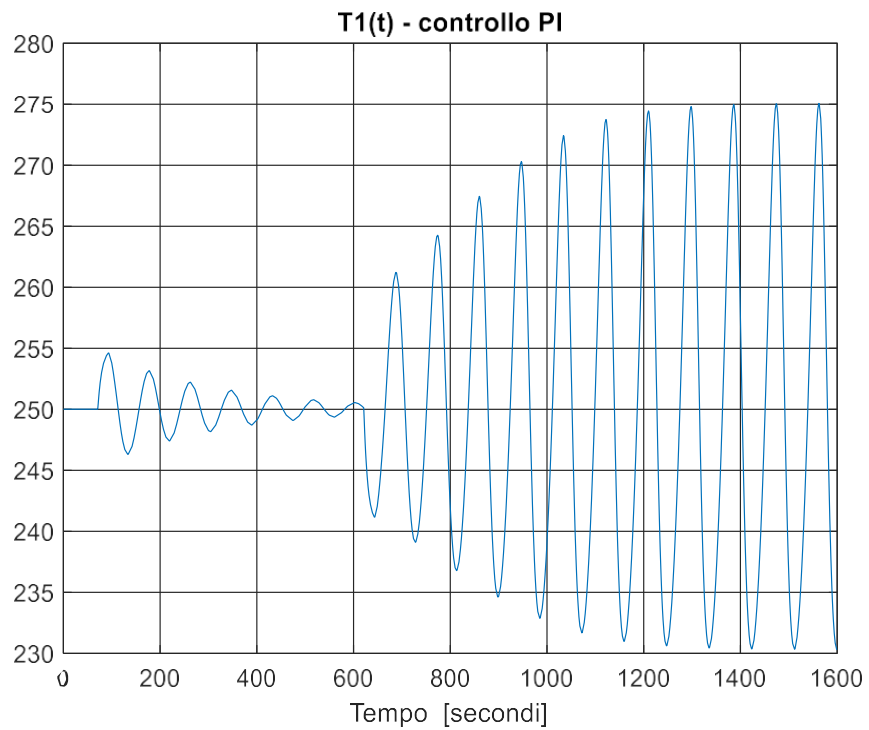
figure(2)
plot(T1NL.time,T1NL.data )
title('T1(t) - controllo PI')
xlabel('Tempo [secondi]'), grid

figure(3)
plot(w.time,w.data )
title('w(t) - controllo PI')
xlabel('Tempo [secondi]'), grid
```

$$K = 0.8 K_{cr}$$



$$K = 1.1 K_{cr}$$



# Linearizzazione di un sistema non lineare (caso generale)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

### Forma estesa:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= h_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r) \\ y_2(t) &= h_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= h_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, d_1, d_2, \dots, d_r)\end{aligned}$$

$$\mathbf{h}(\cdot) = \begin{bmatrix} h_1(\cdot) \\ h_2(\cdot) \\ \vdots \\ h_p(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^p$$

Il passo preliminare è individuare un **punto di equilibrio** in corrispondenza del quale determinare il modello linearizzato

Siano  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{R}^n$        $\mathbf{u}^* \in \mathcal{R}^m$        $\mathbf{d}^* \in \mathcal{R}^r$

**valori di equilibrio** tali che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*) = \mathbf{0}$$

Il modello linearizzato è **espresso in funzione delle seguenti variabili**

$\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$       Stato del modello linearizzato

$\delta\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*$       Ingresso del modello linearizzato

$\delta\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}(t) - \mathbf{d}^*$       Disturbo del modello linearizzato

$\delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*$       Uscita del modello linearizzato

$$= \mathbf{y}(t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$$

## modello linearizzato

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x + B\delta u + E\delta d$$

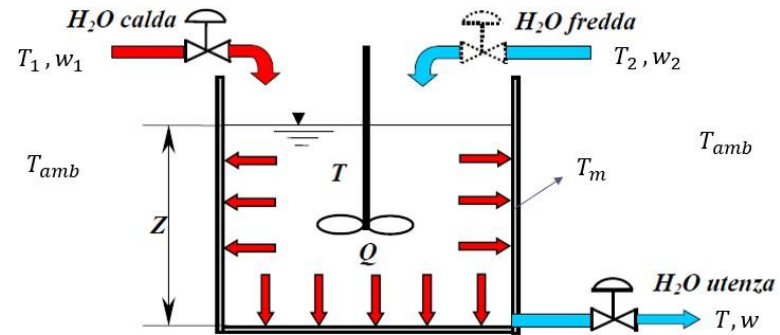
$$\delta y(t) = C\delta x + D\delta u + Q\delta d$$

## coefficienti delle matrici del modello

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{EQ} \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{EQ} \quad e_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial d_j} \right|_{EQ}$$

$$c_{ij} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|_{EQ} \quad d_{ij} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right|_{EQ} \quad q_{ij} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial d_j} \right|_{EQ}$$

## Esempio: miscelatore



Vettore di stato

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ T_m(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Modello del terz'ordine ( $n = 3$ )

Vettore degli ingressi  
manipolabili (MV)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad m = 2$$

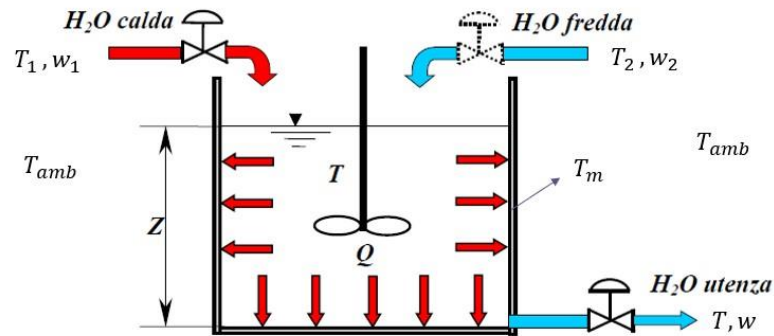
Vettore degli ingressi non  
manipolabili (DV)

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \\ d_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_{amb}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad r = 4$$

Vettore delle uscite (CV)

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad p = 2$$

## Esempio: Miscelatore



$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, d_1, d_2) = \\ &= - \left[ \frac{u_1(t) + u_2(t)}{\rho A x_3(t)} + \frac{hP}{\rho C_V A} \right] x_1(t) + \frac{hP}{\rho C_V A} x_2(t) + \frac{u_1(t)}{\rho A x_3(t)} d_1(t) + \frac{u_2(t)}{\rho A x_3(t)} d_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_m(t)}{dt} &= \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, d_3) = \\ &= - \left[ \frac{hP x_3(t)}{M_m C_{Vm}} + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \right] x_2(t) + \frac{hP x_3(t)}{M_m C_{Vm}} x_1(t) + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} d_3(t) \end{aligned}$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx_3(t)}{dt} = f_3(u_1, u_2, d_4) = \frac{1}{\rho A} [u_1(t) + u_2(t) - d_4(t)]$$

$$y_1(t) = T(t) = h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1(t)$$

$$y_2(t) = z(t) = h_2(x_1, x_2, x_3) = x_3(t)$$

## Ipotizziamo un serbatoio a sezione quadrata (lato 1 metro).

A: sezione orizzontale del serbatoio  $A = 1m^2$

P: perimetro del serbatoio  $P = 4m$

### Parete del serbatoio

$S_p$ : spessore della parete del serbatoio (acciaio)  $S_p = 1\text{ cm}$

$H_p$ : altezza della parete del serbatoio  $H_p = 2\text{ m}$

$A_p$ : superficie esterna del serbatoio a contatto con l'aria  $A_p = P H_p = 8m^2$

### Liquido: acqua

Calore specifico:  $c_v = 4180 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$

Densità:  $\rho = 979 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

### Parete serbatoio: acciaio

Calore specifico:  $c_{vm} = 502 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$

Densità:  $\rho_m = 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

## Scambio termico:

$h$ : coefficiente di scambio termico convettivo fra la parete del serbatoio ed il liquido

$$h = 2000 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ K}$$

$R_{ma}$ : Resistenza termica totale fra la parete del serbatoio e l'aria esterna

$$R_{ma} = h_{ma} A_p = 20 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ K} \times 8m^2 = 160 \frac{W}{^\circ K}$$

## Massa della parete del serbatoio

$$M_m = \rho S_p A_p = 632 \text{ kg}$$

## Passo 1

Individuare un **punto di equilibrio** in corrispondenza del quale effettuare la linearizzazione

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^* \\ T_m^* \\ z^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ d_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_{am}^* \\ w^* \end{bmatrix}$$

$$-\left[ \frac{w_1^* + w_2^*}{z^*} + \frac{hP}{C_V} \right] T^* + \frac{hP}{C_V} T_m^* + \frac{w_1^*}{z^*} T_1^* + \frac{w_2^*}{z^*} T_2^* = 0$$

$$-\left[ hPz^* + \frac{1}{R_{ma}} \right] T_m^* + hPz^* T^* + \frac{1}{R_{ma}} T_{am}^* = 0$$

$$w_1^* + w_2^* - w^* = 0$$

## Passo 1

Individuare un **punto di equilibrio** in corrispondenza del quale effettuare la linearizzazione

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^* \\ T_m^* \\ z^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ d_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_{am}^* \\ w^* \end{bmatrix}$$

$$-\left[ w_1^* + w_2^* + \frac{hPz^*}{C_V} \right] T^* + \frac{hPz^*}{C_V} T_m^* + w_1^* T_1^* + w_2^* T_2^* = 0$$

$$-\left[ hPz^* + \frac{1}{R_{ma}} \right] T_m^* + hPz^* T^* + \frac{1}{R_{ma}} T_{am}^* = 0$$

$$w_1^* + w_2^* - w^* = 0$$

Abbiamo 9 incognite e 3 relazioni. **6 variabili possono essere fissate a piacere** e le rimanenti 3 si calcolano di conseguenza

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^* \\ T_m^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65^\circ\text{C} \\ T_m^* \\ 1.5 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ d_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_{am}^* \\ w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ\text{C} \\ 50^\circ\text{C} \\ 25^\circ\text{C} \\ 1 \text{ kg/s} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \end{bmatrix}$$

$$-\left[1 + \frac{hPz^*}{C_V}\right]T^* + \frac{hPz^*}{C_V}T_m^* + w_1^*T_1^* + (1 - w_1^*)T_2^* = 0$$

$$T_m^* = \frac{hPz^*T^* + \frac{1}{R_{ma}}T_{amb}^*}{hPz^* + \frac{1}{R_{ma}}} = 64.99^\circ\text{C}$$

$$w_1^* + w_2^* = w^* = 1$$

$$-\left[1 + \frac{hPz^*}{C_V}\right]T^* + \frac{hPz^*}{C_V}T_m^* + w_1^*T_1^* + (1 - w_1^*)T_2^* = 0$$



$$w_1^* = \frac{\left[1 + \frac{hPz^*}{C_V}\right]T^* - \frac{hPz^*}{C_V}T_m^* - T_2^*}{T_1^* - T_2^*} = 0.375 \text{ kg/s}$$

$$w_2^* = 1 - w_1^* = 0.625 \text{ kg/s}$$

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^* \\ T_m^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65^\circ\text{C} \\ 64.99^\circ\text{C} \\ 1.5 \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ d_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_{am}^* \\ w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ\text{C} \\ 50^\circ\text{C} \\ 25^\circ\text{C} \\ 1 \text{ kg/s} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \text{ kg/s} \\ 0.625 \text{ kg/s} \end{bmatrix}$$

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x + B\delta u + E\delta d$$

$$\delta y(t) = C\delta x$$

## coefficienti delle matrici del modello

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{EQ} \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{EQ} \quad e_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial d_j} \right|_{EQ} \quad c_{ij} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|_{EQ}$$

Tutti i coefficienti si ricavano dalle derivate parziali riportate nelle slides precedenti in corrispondenza del punto di equilibrio calcolato

## Modello linearizzato

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x + B\delta u + E\delta d$$

$$\delta y(t) = C\delta x$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \\ x_3(t) - x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) - T^* \\ T_m(t) - T_m^* \\ z(t) - z^* \end{bmatrix}$$

$$\delta u = \begin{bmatrix} u_1(t) - u_1^* \\ u_2(t) - u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) - w_1^* \\ w_2(t) - w_2^* \end{bmatrix}$$

$$\delta d = \begin{bmatrix} d_1(t) - d_1^* \\ d_2(t) - d_2^* \\ d_3(t) - d_3^* \\ d_4(t) - d_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(t) - T_1^* \\ T_2(t) - T_2^* \\ T_{amb}(t) - T_{amb}^* \\ w(t) - w^* \end{bmatrix}$$

$$\delta y = \begin{bmatrix} T(t) - T^* \\ z(t) - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_3(t) - x_3^* \end{bmatrix}$$

### coefficienti delle matrici del modello

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{EQ} \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{EQ} \quad e_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial d_j} \right|_{EQ} \quad c_{ij} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|_{EQ}$$

$$\begin{aligned}\frac{dT(t)}{dt} &= \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, d_1, d_2) = \\ &= - \left[ \frac{u_1(t) + u_2(t)}{\rho A x_3(t)} + \frac{hP}{\rho C_V A} \right] x_1(t) + \frac{hP}{\rho C_V A} x_2(t) + \frac{u_1(t)}{\rho A x_3(t)} d_1(t) + \frac{u_2(t)}{\rho A x_3(t)} d_2(t)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = - \left[ \frac{u_1(t) + u_2(t)}{\rho A x_3(t)} + \frac{hP}{\rho C_V A} \right] \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{hP}{\rho C_V A}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{(u_1(t) + u_2(t))x_1(t)}{\rho A x_3^2(t)} - \frac{u_1(t)}{\rho A x_3^2(t)} d_1(t)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = - \frac{x_1(t)}{\rho A x_3(t)} + \frac{d_1}{\rho A x_3(t)} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = - \frac{x_1(t)}{\rho A x_3(t)} + \frac{d_2}{\rho A x_3(t)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial d_1} = \frac{u_1(t)}{\rho A x_3(t)} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial d_2} = \frac{u_2(t)}{\rho A x_3(t)}$$

$$\begin{aligned}\frac{dT_m(t)}{dt} &= \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, d_3) = \\ &= - \left[ \frac{hPx_3(t)}{M_m C_{Vm}} + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \right] x_2(t) + \frac{hPx_3(t)}{M_m C_{Vm}} x_1(t) + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} d_3(t)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{hPx_3(t)}{M_m C_{Vm}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = - \left[ \frac{hPx_3(t)}{M_m C_{Vm}} + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \right]$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = - \frac{hPx_2(t)}{M_m C_{Vm}} + \frac{hPx_1(t)}{M_m C_{Vm}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial d_3} = \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}}$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx_3(t)}{dt} = f_3(u_1, u_2, d_4) = \frac{1}{\rho A} [u_1(t) + u_2(t) - d_4(t)]$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_1} = \frac{1}{\rho A}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_2} = \frac{1}{\rho A}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial d_4} = -\frac{1}{\rho A}$$

## Elementi della matrice A

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{EQ} = - \left[ \frac{w_1^* + w_2^*}{\rho A z^*} + \frac{hP}{\rho C_V A} \right]$$

$$a_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{EQ} = \frac{hP}{\rho C_V A}$$

$$a_{13} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right|_{EQ} = \frac{(w_1^* + w_2^*)T^* - w_1^*T_1^*}{\rho A z^{*2}}$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{EQ} = \frac{hPz^*}{M_m C_{Vm}}$$

$$a_{22} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{EQ} = - \left[ \frac{hPz^*}{M_m C_{Vm}} + \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \right]$$

$$a_{23} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_{EQ} = - \frac{hPT_m^*}{M_m C_{Vm}} + \frac{hPT^*}{M_m C_{Vm}} = \frac{hP(T^* - T_m^*)}{M_m C_{Vm}}$$

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0$$

## Elementi della matrice B

$$b_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{EQ} = \frac{T_1^* - T^*}{\rho A z^*}$$

$$b_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right|_{EQ} = \frac{T_2^* - T^*}{\rho A z^*}$$

$$b_{21} = b_{22} = 0$$

$$b_{31} = \left. \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \right|_{EQ} = \frac{1}{\rho A}$$

$$b_{32} = \left. \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \right|_{EQ} = \frac{1}{\rho A}$$

## Elementi della matrice E

$$e_{11} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial d_1} \right|_{EQ} = \frac{w_1^*}{\rho A z^*} \quad e_{12} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial d_2} \right|_{EQ} = \frac{w_2^*}{\rho A z^*} \quad e_{13} = e_{14} = 0$$

$$e_{23} = \left. \frac{\partial f_2}{\partial d_3} \right|_{EQ} = \frac{1}{M_m C_{Vm} R_{ma}} \quad e_{21} = e_{22} = e_{24} = 0$$

$$e_{31} = e_{32} = e_{33} = 0$$

$$e_{34} = \left. \frac{\partial f_3}{\partial d_4} \right|_{EQ} = -\frac{1}{\rho A}$$

## Elementi della matrice C

Poiché le variabili di uscita sono un sottoinsieme delle variabili di stato, la matrice C si determina in maniera immediata

$$\delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} T(t) - T^* \\ z(t) - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_3(t) - x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \delta \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# File: miscelatore\_live.m

```
clear all, clc, close all
```

## % PARAMETRI DEL MODELLO

```
A=1; % sezione orizzontale del serbatoio [m^2]
```

```
P=4; % perimetro del serbatoio [m]
```

```
Sp=0.01; % spessore della parete del serbatoio [m]
```

```
Hp=2; % altezza della parete del serbatoio [m]
```

```
Ap=P*Hp; % superficie esterna del serbatoio a contatto con l'aria [m^2]
```

```
rho=979; % densita acqua [kg/m^3]
```

```
rhom=7900; % densita acciaio [kg/m^3]
```

```
cv=4180; % calore specifico acqua [J/kg K]
```

```
cvm=502; % calore specifico acciaio [J/kg K]
```

```
Mm=rhom*P*Sp*Hp; % massa della parete del serbatoio [kg]
```

```
h=2000; % coefficiente di scambio termico convettivo fra la parete del serbatoio  
% ed il liquido [W/m^2 K]
```

```
hma=20; % coefficiente di scambio termico convettivo fra la parete del serbatoio  
% e l'aria esterna [W/m^2 K]
```

```
Rma=hma*Ap; % coefficiente di scambio termico totale fra la parete del serbatoio  
% e l'aria esterna
```

## % valori di equilibrio

```
Tstar=65;  
zstar=1.5;  
T1star=90;  
T2star=50;  
Tamb=25;  
w=1;
```

```
Tmstar=(h*P*zstar*Tstar+Tamb/Rma) / (h*P*zstar+1/Rma)  
w1star=(Tstar+h*P*zstar/cv*(Tstar-Tmstar)-T2star) / (T1star-T2star)  
w2star=1-w1star  
wstar=w1star+w2star
```

```
Tmstar =  
    64.999979166677520  
w1star =  
    0.375001495214532  
w2star =  
    0.624998504785468  
wstar =  
    1
```

$$\delta \dot{x}(t) = A_{vds} \delta x + B_{vds} \delta u + E_{vds} \delta d$$

$$\delta y(t) = C \delta x$$

$A_{vds} = 3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} -0.002635896082485 & 0.001954929109383 & -0.000000027151779 \\ 0.037823389984366 & -0.037823409684049 & 0.000000525324587 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$B_{vds} = 3 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 0.017024174327545 & -0.010214504596527 \\ 0 & 0 \\ 0.001021450459653 & 0.001021450459653 \end{bmatrix}$$

$E_{vds} = 3 \times 4$

$$\begin{bmatrix} 0.000255363633105 & 0.000425603339997 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0.000000019699682 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

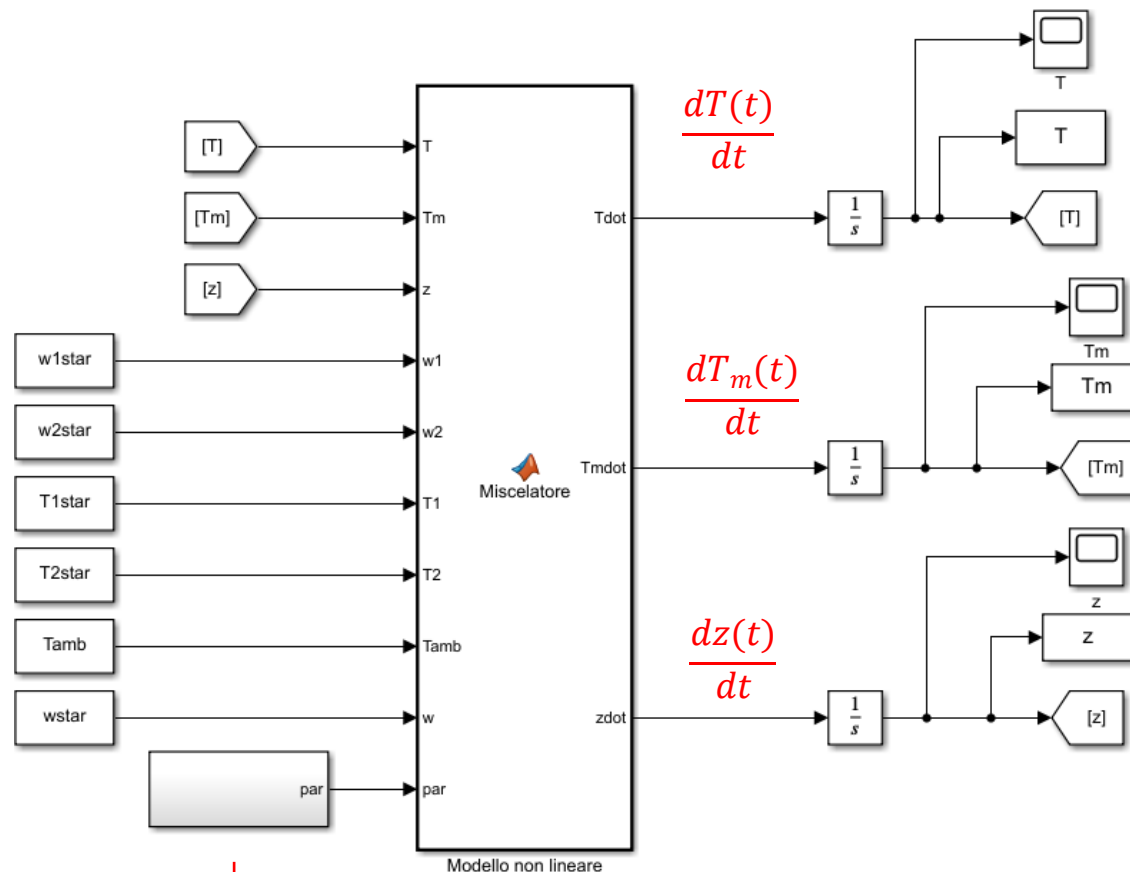
## Simulazione del modello non lineare

```
%condizioni iniziali
T0=60;
Tm0=60;
z0=1.5;

%ingressi all'equilibrio
sim('Miscelatore')
figure(1)
plot(T.time,T.data)
title('T(t) - Temperatura in uscita')
xlabel('Tempo [secondi]'), grid
figure(2)
plot(Tm.time,Tm.data)
title('T(t) - Temperatura della parete')
xlabel('Tempo [secondi]'), grid
figure(3)
plot(z.time,z.data)
title('z(t) - Livello')
xlabel('Tempo [secondi]'), grid
```

Miscelatore.slx

## Matlab function



Vettore dei parametri passato in ingresso al blocco Matlab function che calcola le derivate delle variabili di stato.

## Corpo del blocco Matlab function

```
function [Tdot,Tmdot,zdot] = miscelatore(T,Tm,z,w1,w2,T1,T2,Tamb,w,par)
```

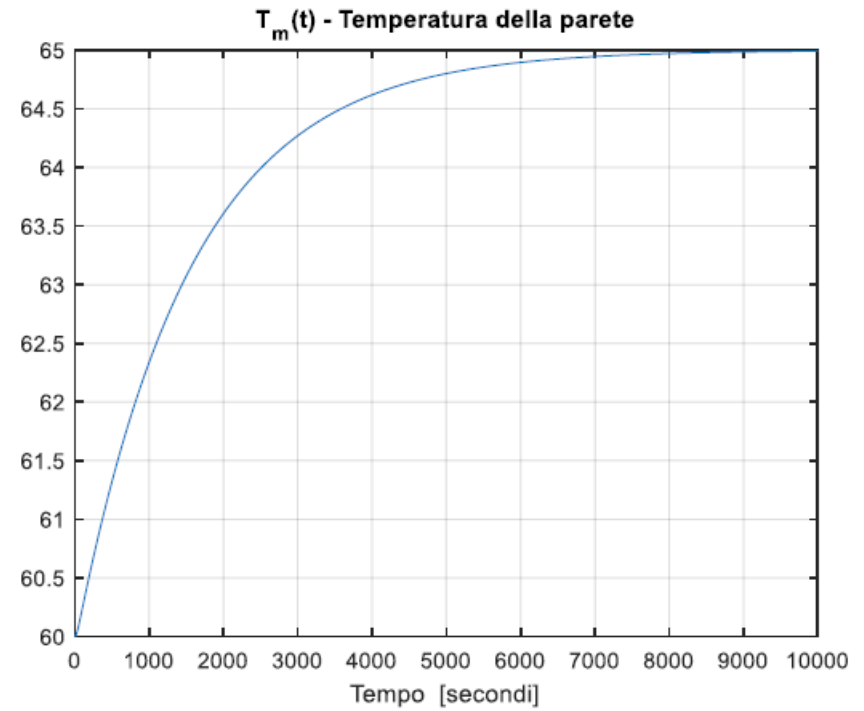
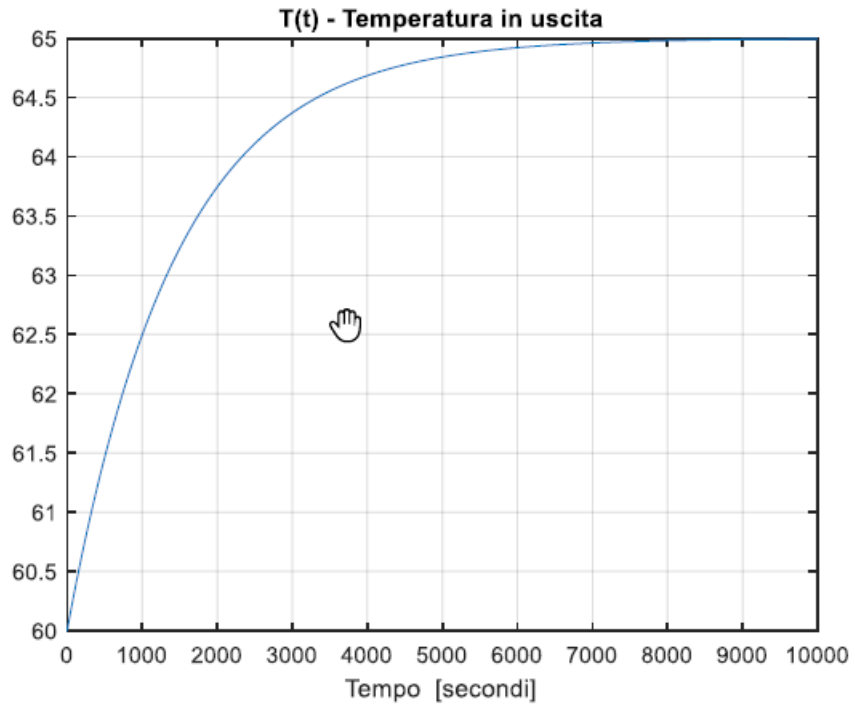
```
rho=par(1);  
A=par(2);  
h=par(3);  
P=par(4);  
cv=par(5);  
Mm=par(6);  
cvm=par(7);  
Rma=par(8);
```

```
Tdot=-((w1+w2)/(rho*A*z)+h*P/(rho*cv*A))*T+h*P/(rho*cv*A)*Tm+w1*T1/(rho*A*z)+w2*T2/(rho*A*z);
```

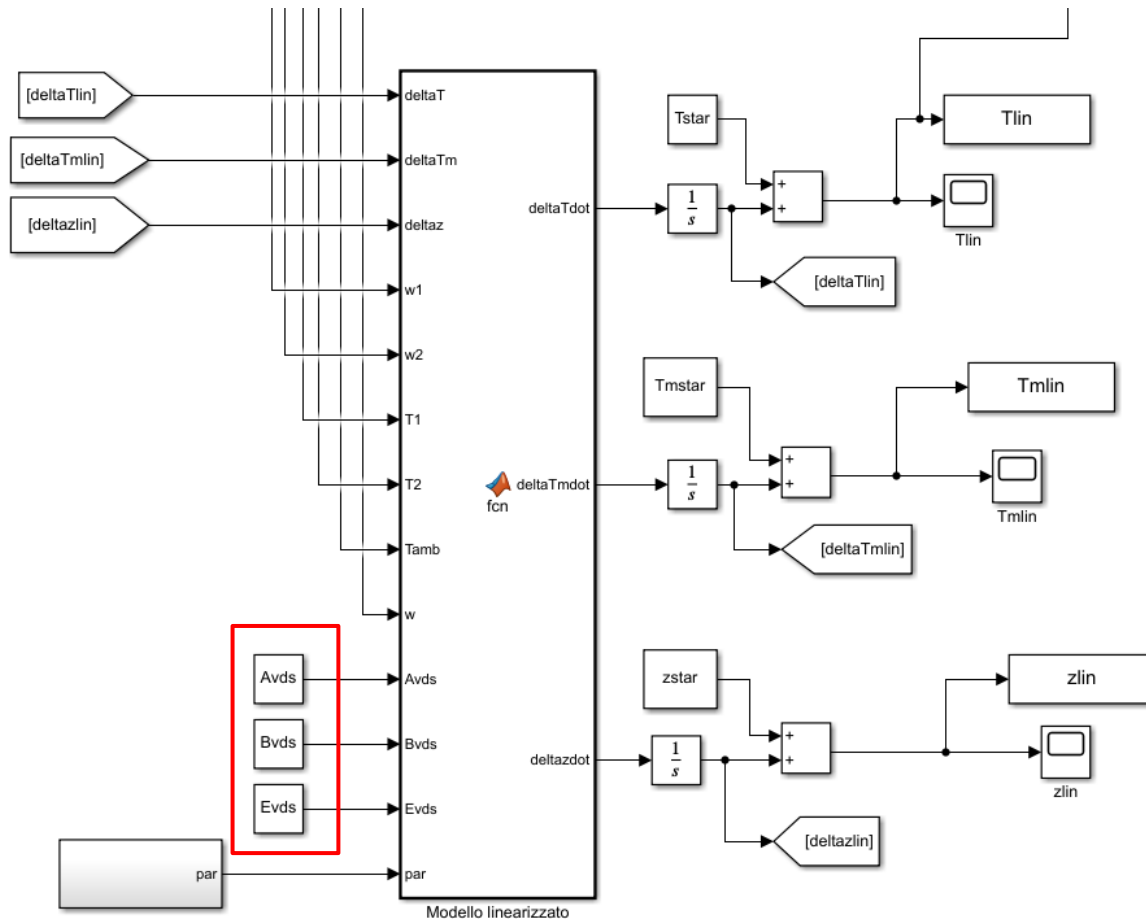
```
Tmdot=- (h*P*z/(Mm*cvm)+1/(Mm*cvm*Rma))*Tm+h*P*z/(Mm*cvm)*T+Tamb/(Mm*cvm*Rma);
```

```
zdot=(w1+w2-w)/(rho*A);
```

## Convergenza verso lo stato stazionario



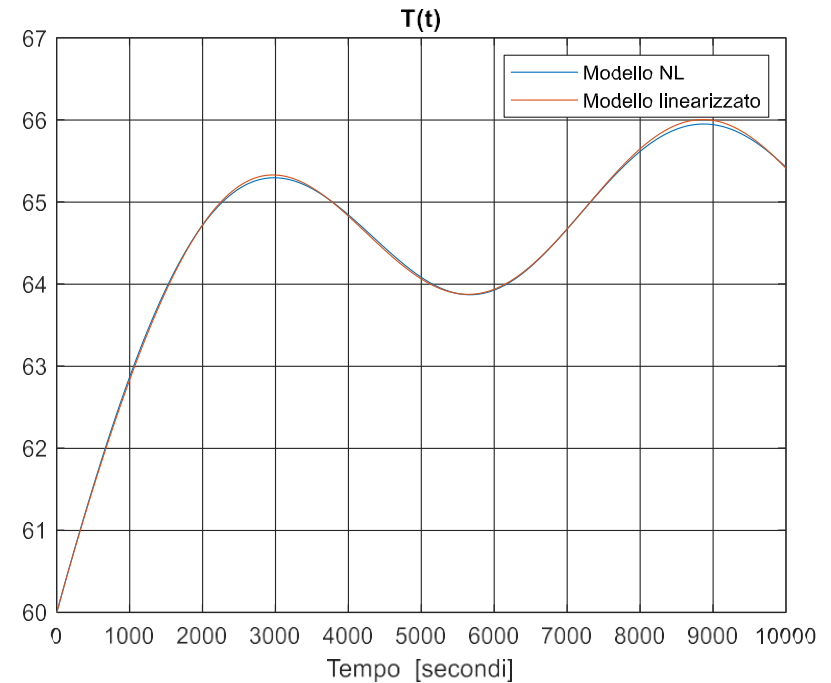
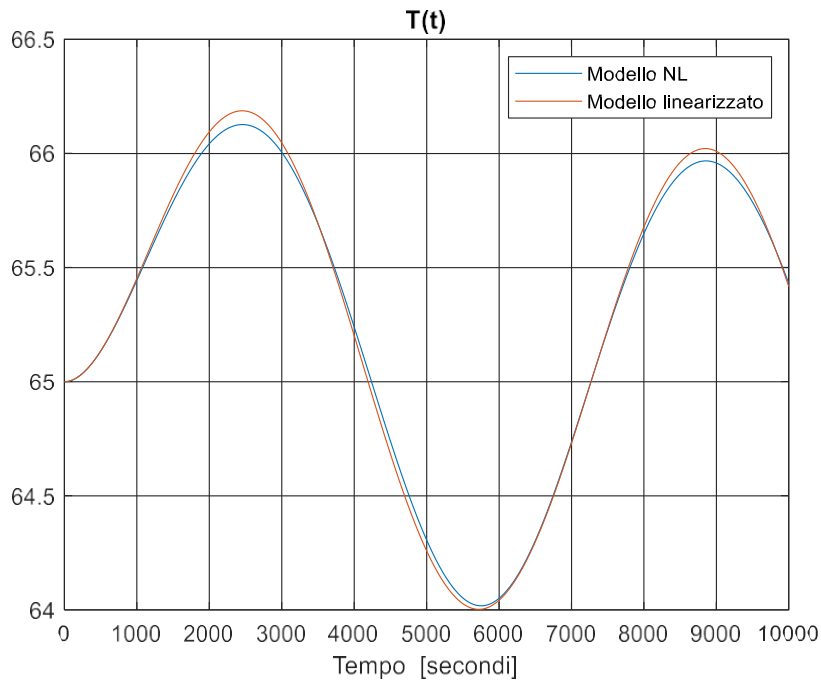
## Simulazione del modello linearizzato



## Simulazione del modello linearizzato

Confrontiamo il comportamento del modello originale e del modello linearizzato a fronte di una oscillazione di  $w_1(t)$  intorno al valore di equilibrio con ampiezza del 20%:

$$w_1(t) = w_1^* + 0.2w_1^*\sin(0.001t)$$

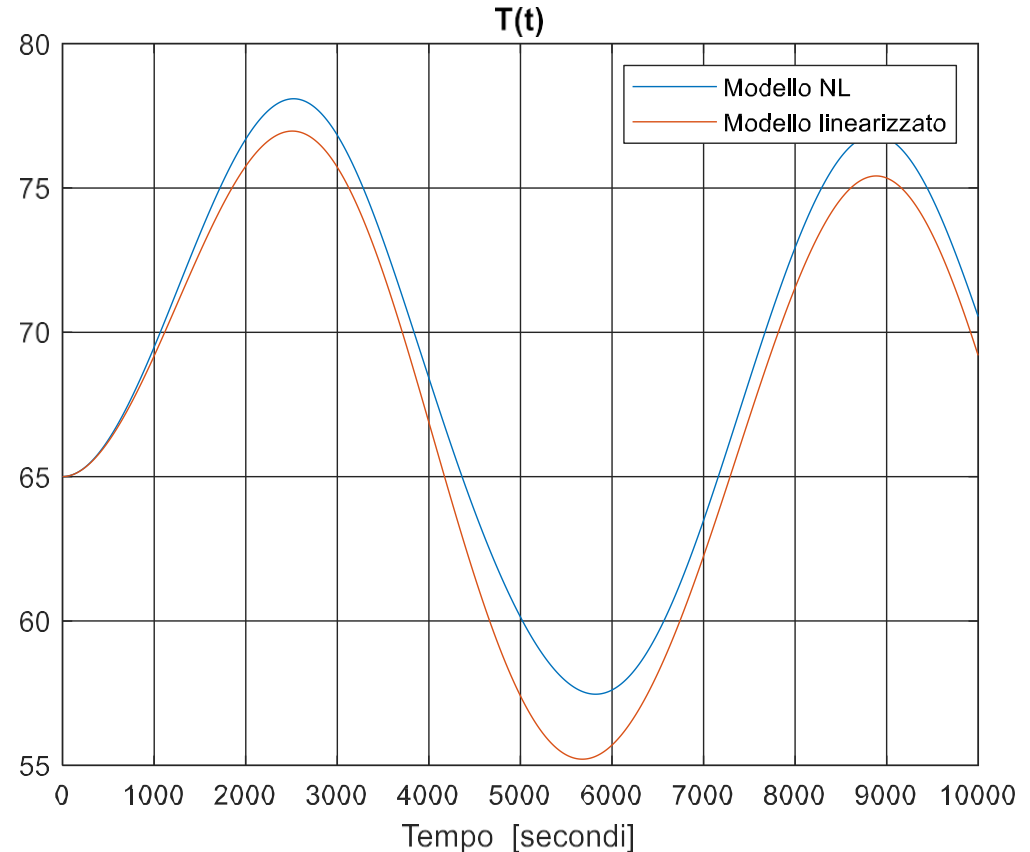


NB: Il modello Simulink consente, cliccando sui selettori, di inserire delle perturbazioni analoghe sulla portata e sulla temperatura di ingresso del fluido caldo.

$$w_1(t) = w_1^* + 0.2w_1^* \sin(0.001t)$$

$$w_2(t) = w_2^* + 0.1w_2^* \sin(0.002t)$$

$$T_1(t) = T_1^* + 0.5T_a^* \sin(0.001t)$$



$$\frac{\delta Y(s)}{\delta U(s)} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\delta T(s) = G_{11}(s)\delta w_1(s) + G_{12}(s)\delta w_2(s)$$

$$\delta z(s) = G_{21}(s)\delta w_1(s) + G_{22}(s)\delta w_2(s)$$

`%Funzioni di trasferimento`

`%del modello linearizzato`

`ModSS=ss (Avds, Bvds, Cvds, Dvds)`

`G=tf (ModSS);`

`G=minreal (G)`

`G11=G (1, 1)`

`G12=G (1, 2)`

`G21=G (2, 1)`

`G22=G (2, 2)`

`disp ('calcolo automatico del poli, degli zeri e del  
guadagno della G11')`

`P11=pole (G11)`

`Z11=zero (G11)`

`mu11=dcgain (G11)`

G =

From input 1 to output...

0.01702 s + 0.0006439  
1: -----  
s^2 + 0.04046 s + 2.576e-05

0.001021  
2: -----  
s

From input 2 to output...

-0.01021 s - 0.0003863  
1: -----  
s^2 + 0.04046 s + 2.576e-05

0.001021  
2: -----  
s

Continuous-time transfer function.

## Modello linearizzato

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x + B\delta u + E\delta d$$

$$\delta y(t) = C\delta x$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_2(t) - x_2^* \\ x_3(t) - x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) - T^* \\ T_m(t) - T_m^* \\ z(t) - z^* \end{bmatrix}$$

$$\delta u = \begin{bmatrix} u_1(t) - u_1^* \\ u_2(t) - u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) - w_1^* \\ w_2(t) - w_2^* \end{bmatrix}$$

$$\delta d = \begin{bmatrix} d_1(t) - d_1^* \\ d_2(t) - d_2^* \\ d_3(t) - d_3^* \\ d_4(t) - d_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(t) - T_1^* \\ T_2(t) - T_2^* \\ T_{amb}(t) - T_{amb}^* \\ w(t) - w^* \end{bmatrix}$$

$$\delta y = \begin{bmatrix} T(t) - T^* \\ z(t) - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^* \\ x_3(t) - x_3^* \end{bmatrix}$$

### coefficienti delle matrici del modello

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{EQ} \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{EQ} \quad e_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial d_j} \right|_{EQ} \quad c_{ij} = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|_{EQ}$$