

Multimetri digitali

1 - Multimetri digitali (DMM, *Digital Multi Meter*)

I voltmetri, gli amperometri e i multimetri sono strumenti di misura di base che vengono realizzati sia in forma analogica che digitale. I modelli digitali si sono ormai imposti sul mercato in quanto, normalmente, consentono di ottenere un più favorevole rapporto costo-prestazioni.

L'alimentazione propria

La strumentazione elettronica, in generale, prevede il ricorso a una alimentazione propria (rete o batteria) indipendente dalla grandezza da misurare (Fig.1.1). Questa particolarità consente di non caricare il circuito sotto prova, evitando di sottrargli l'energia necessaria per la presentazione o l'utilizzo del risultato di misura. Gli strumenti elettronici possono adottare la forma di visualizzazione tipica degli strumenti analogici, mediante la deviazione di un indice su una scala graduata, ma più spesso si preferisce adottare la forma di presentazione numerica, mediante indicazione di un numero su un *display*.

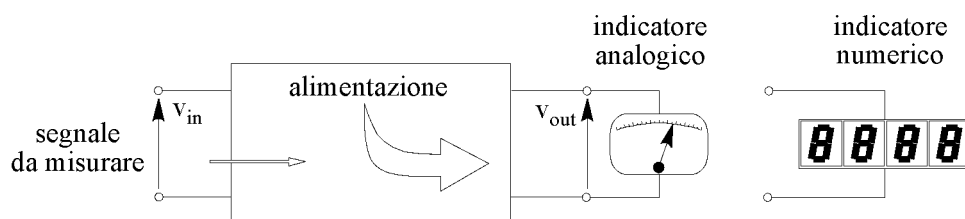


Fig.1.1- Riduzione dell'effetto di carico per la strumentazione elettronica.

Voltmetro digitale (DVM, *Digital Volt Meter*)

I voltmetri digitali misurano tensioni continue (DC) e alternative (AC) o comunque variabili. Lo schema di principio è riportato in Fig.1.2.

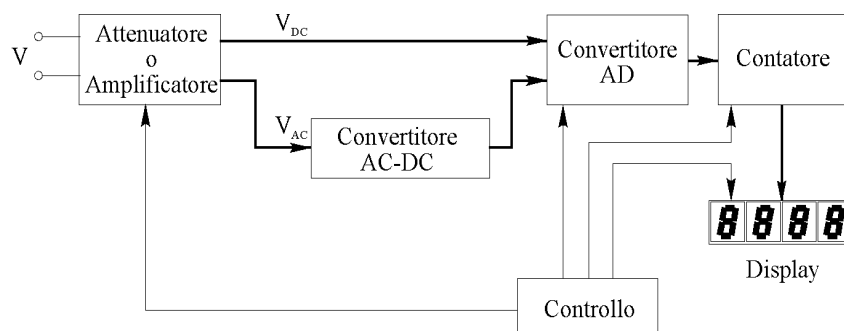


Fig.1.2- Schema per uno voltmetro digitale.

Normalmente la portata massima per le tensioni è non superiore a 1000 V. La portata minima è dell'ordine dei millivolt. Esiste la possibilità di impostare portate intermedie con selettori manuali o automatici, agendo sul blocco "Attenuatore o Amplificatore".

Per l'attenuazione si può ricorrere a un partitore resistivo, per esempio secondo lo schema di Fig.1.3 dove sono impiegate le resistenze di 9 M Ω , 900 k Ω e 100 k Ω , per un totale di 10 M Ω . In tale circuito, se si ammette un comportamento ideale dell'amplificatore operazionale, questo non assorbe alcuna corrente al morsetto non invertente (+). Pertanto la tensione v_{in} applicata in ingresso allo strumento vede sempre una resistenza pari alla somma delle resistenze del partitore (nel caso illustrato il valore sufficientemente alto di 10 M Ω).

Se, per esempio, la tensione applicata v_{in} ha un valore inferiore a 50 V, il selettore di portata è posizionato sul valore corrispondente. Allora la tensione sul morsetto non invertente dell'operazionale è inferiore a 5 V, che costituisce un valore idoneo per l'applicazione diretta in ingresso all'operazionale.

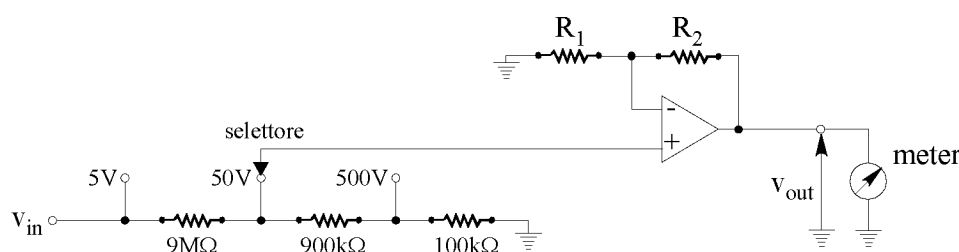


Fig.1.3- Partitore per l'attenuatore in ingresso.

Il selettore di portata verrà posizionato su una delle tre posizioni contraddistinte dai valori 5 V, 50 V e 500 V, a seconda del valore della tensione in ingresso. È bene iniziare la misurazione partendo dalla portata più alta, passando poi a quelle più basse, se necessario. Nei multimetri di maggior pregio la rete attenuatrice in AC è separata da quella in DC (per motivi di comportamento in frequenza, che richiedono una compensazione). Più spesso si ha un unico attenuatore d'ingresso.

I segnali di valore significativamente più piccolo della portata minima (5 V, per lo schema in figura) devono invece essere amplificati, al fine di far lavorare il convertitore con tensioni più vicine al proprio fondoscala e di ottenere quindi una misura più accurata. Per amplificare opportunamente il segnale in ingresso si imposta il guadagno dell'amplificatore in configurazione non invertente al valore desiderato. Per la configurazione in Fig.1.3, il guadagno è:

$$G = v_{out}/v_{in} = (R_1 + R_2)/R_1 \text{ e si ha: } R_2 = R_1 (G - 1).$$

Per esempio, se $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ e si vuole un guadagno $G = 100$, allora deve essere $R_2 = 99 \text{ k}\Omega$.

Se le resistenze R_1 e R_2 , che definiscono il guadagno dello stadio amplificatore, sono di valore uguale, il guadagno a ciclo chiuso è pari a 2 e, in presenza del valore massimo di 5 V in ingresso, la tensione d'uscita v_{out} a fondoscala risulta di 10 V.

Nei multimetri commerciali, dotati di funzioni più o meno sofisticate per il controllo e la gestione della misura, è frequente la funzione di *autorange*, che consiste nella predisposizione automatica della portata più opportuna per la grandezza sotto misura.

Misure di vero valore efficace

Le tensioni e le correnti che interessano i circuiti elettrici possono essere costanti nel tempo, ma più tipicamente sono variabili.

Nelle misure di tensione continue (*Direct Current, DC*) il segnale in uscita dal blocco di attenuazione o amplificazione viene direttamente applicato al convertitore analogico/digitale (*AD*).

In presenza di una tensione periodica (*Alternating Current, AC*), invece, il voltmetro deve misurare il valore efficace di tale grandezza, definito come la radice del valore quadratico medio (*Root Mean Square, RMS*). Il valore efficace di un segnale elettrico qualsiasi, sia di tensione che di corrente, rappresenta il parametro che meglio lo caratterizza e lo riassume dal punto di vista energetico:

$$\bullet U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T u^2(t) dt} \quad (1.1)$$

$$\bullet I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T i^2(t) dt} \quad (1.2)$$

Le grandezze elettriche U ed I , appena definite, costituiscono i *valori efficaci* ($RMS = Root Mean Square$) della tensione e della corrente periodiche $u(t)$ e $i(t)$.

(si ricorda che la nota espressione secondo la quale valore efficace di una grandezza alternata si ottiene dividendo il suo valore massimo per $\sqrt{2}$ è valida **solo** nel caso di grandezze sinusoidali).

Quando diciamo, per esempio, che la tensione della rete di distribuzione pubblica è di 230 V stiamo implicitamente intendendo che questo sia il suo valore efficace.

Nelle misure di tensione in *AC*, quindi, il circuito d'ingresso prevede una ulteriore importante sezione circuitale, costituita dal convertitore *AC-DC* (vedi lo schema a blocchi di Fig.1.2). In tal modo il convertitore analogico/digitale (*AD*) tratta sempre segnali di tensione continui, che possono essere digitalizzati tramite convertitori analogico/digitali accurati.

Nei moderni multimetri digitali è opportuno che il convertitore *AC-DC* sia del tipo *TRMS-to-DC*, ossia produca in uscita un segnale di tensione continuo, con valore pari al vero valore efficace (*True Root Mean Square*) del segnale applicato in ingresso, indipendentemente dalla sua forma d'onda, cioè senza ipotizzare un andamento specifico, quale quello sinusoidale.

Dispositivi di visualizzazione

I dispositivi di visualizzazione nei multimetri digitali sono normalmente display a sette segmenti, caratterizzati dal loro numero di cifre. Ciascuna cifra piena può assumere ogni valore intero compreso fra 0 e 9. Pertanto un display, ad esempio, con tre cifre piene può rappresentare il massimo valore 999.

Il costruttore dichiara spesso un numero di cifre con significato pieno più mezza cifra, ad esempio $3\frac{1}{2}$. La mezza cifra (a sinistra del display, vedi Fig.1.4) non può assumere tutti i valori fra $0\div 9$, ma, per esempio, solo i valori 0 ed 1. In tal caso, il massimo valore che può essere rappresentato su quel display con $3\frac{1}{2}$ cifre risulta 1999.

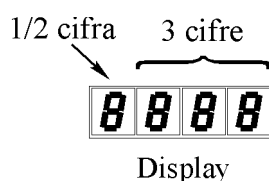


Fig.1.4 - Il display digitale.

I multimetri digitali

I multimetri digitali (*Digital MultiMeter, DMM*) sono la naturale evoluzione dei voltmetri digitali e realizzano normalmente almeno le ulteriori funzioni di amperometri e ohmmetri per le misure di corrente e di resistenza. Queste grandezze elettriche, per poter essere misurate, sono preventivamente convertite in tensione (vedi Fig.1.5 e 1.6).

Misure di corrente

Normalmente le misure di corrente (Fig.1.5) avvengono tramite una resistenza tarata R_s , interna allo strumento. La corrente I viene fatta passare nella resistenza R_s , provocando ai suoi capi la caduta di tensione $R_s I$. Questa caduta di tensione viene applicata direttamente al convertitore AD, se la corrente da misurare è continua, o preliminarmente al convertitore AC-DC, se la corrente in ingresso è alternata. In tal modo la misura di corrente viene ricondotta alla misura di una tensione, che viene fatta dal voltmetro interno allo strumento e per la quale vale tutto quanto detto in precedenza.

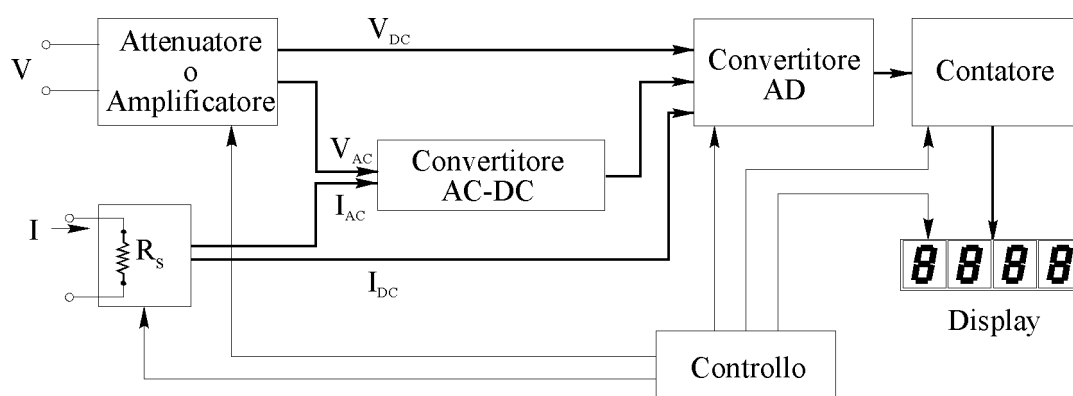


Fig.1.5 - Schema base per la misura di corrente.

Le misure di resistenza

Le misure di resistenza (Fig.1.6) si ottengono iniettando una corrente nota I_0 , prodotta da un generatore di corrente costante, interno allo strumento, nella resistenza incognita R_x e misurando, anche in questo caso, la caduta di tensione agli estremi.

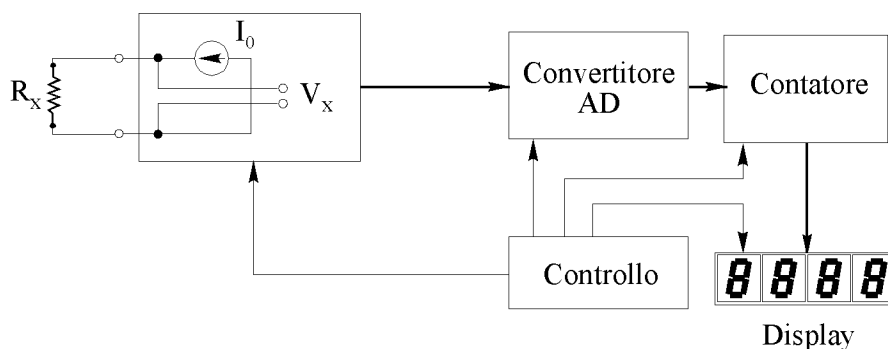


Fig.1.6 - Schema base per la misura di resistenza.

Misura di resistenza a quattro morsetti

Per le resistenze di valore più basso alcuni multimetri digitali, in particolare quelli da banco, offrono, in alternativa al metodo descritto in precedenza, la possibilità di impiegare un secondo metodo, detto “a quattro morsetti” o “a quattro fili” (metodo Kelvin).

Per spiegare il principio di questo metodo si consideri la Fig.1.7, che riporta schematicamente il pannello frontale di un multimetro digitale da banco con le sue possibili connessioni interne per le misure di resistenza.

Nel metodo di base, a due fili, che nello schema di Fig.1.7 si ottiene posizionando i terminali del voltmetro V in posizione $\Omega 2w$, lo strumento inietta la corrente nota I_0 nella resistenza incognita attraverso la coppia di morsetti a destra. Questa corrente passa attraverso le boccole (Hi, Lo), caratterizzate dalle resistenze di contatto R_c , e determina quindi una caduta di tensione pari a $2R_c I_0$, che altera la misura della resistenza incognita. Per bassi valori della resistenza incognita R_x questa alterazione può diventare inaccettabile.

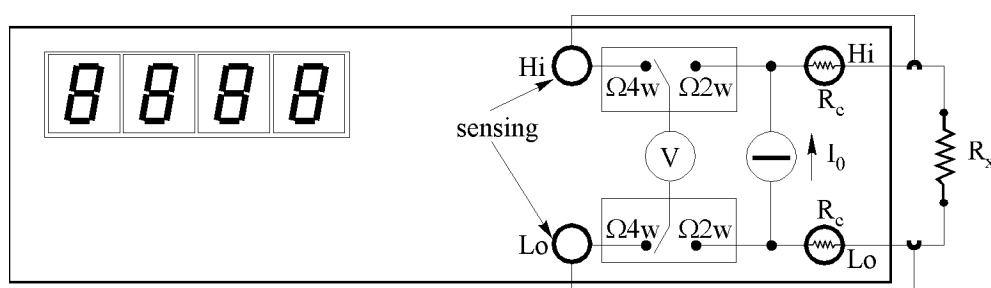


Fig.1.7 - Misure di resistenza a due ($\Omega 2w$) e quattro ($\Omega 4w$) morsetti.

Per evitare questo fatto, nel metodo a quattro fili (che si ottiene posizionando i terminali del voltmetro V in posizione $\Omega 4w$) la tensione viene prelevata, tramite l'altra coppia di morsetti, detti di *sensing*, su due punti più vicini al resistore incognito R_x . Operando in tal modo, le cadute di tensione sulle resistenze di contatto R_c presenti sulle boccole che portano la corrente I_0 al resistore in prova R_x sono escluse dalla tensione da misurare, ottenendo una misura più accurata. Le cadute di tensione nelle resistenze di contatto dei morsetti di *sensing*, che influenzerebbero la misura, sono invece trascurabili, in quanto determinate dalla piccolissima corrente che viene assorbita dall'elevata impedenza interna del voltmetro V .

2 - Specifiche dei multimetri digitali

I multimetri digitali, come tutti gli strumenti di misura, vengono normalmente caratterizzati da una serie di specifiche, più o meno dettagliate, che vengono di solito fornite dal costruttore. Nel seguito si riportano quelle che si incontrano più di frequente.

Portata

La portata (*nominal range*) di uno strumento è l'insieme delle indicazioni ottenibili con una particolare predisposizione dei suoi comandi di impostazione. Per esempio, un voltmetro predisposto sulla portata di 100 V misura i valori di tensione compresi fra 0 V e 100 V.

I multimetri, tipicamente, hanno diverse portate per ciascuna grandezza misurabile.

Risoluzione

La risoluzione (*resolution*) di un dispositivo è la più piccola variazione, nel valore della grandezza da misurare, che causa una variazione percettibile dell'indicazione in uscita.

Per un dispositivo con indicazione digitale tale quantità coincide con la variazione di una unità per la cifra meno significativa (ossia la cifra più a destra nel display).

Per esempio, su un voltmetro che può visualizzare al massimo 49999 conteggi ed è predisposto sulla portata di 500 mV, la massima indicazione possibile è di 499.99 mV.

Pertanto la minima quantità che può essere visualizzata e che corrisponde al cambiamento dell'ultima cifra a destra sul display è di 0.01 mV = 10 μ V.

La risoluzione sulla portata di 500 mV è pertanto di 10 μ V.

In termini relativi potremo dire che lo strumento consente di apprezzare una parte su 50000.

Questo corrisponde a una risoluzione relativa di 2×10^{-5} .

Sensibilità

La sensibilità (*sensitivity*) di uno strumento è il rapporto fra una variazione dell'indicazione in uscita e la corrispondente variazione nell'ingresso. Per esempio, un milliamperometro analogico con indice su scala graduata ha la sensibilità espressa in [divisioni/mA].

Accuratezza

L'accuratezza (*accuracy*) di uno strumento stabilisce il grado di accordo del valore misurato con il vero valore del misurando e rappresenta il parametro più importante per la qualità di una misura. L'accuratezza di uno strumento viene dichiarata dal costruttore in vari modi.

Talvolta si fornisce un parametro riassuntivo di tutte le cause di errore, assegnando allo strumento la classe di precisione.

La *classe di precisione* rappresenta il valore della massima deviazione (I_{\max}) che si può avere in qualunque punto della scala, espresso in percento ($c\%$) del valore di fondoscala (V_{FS}):

$$I_{\max} = \frac{c\%}{100} V_{FS} \quad (2.1)$$

Ad esempio, un voltmetro con portata di 500 V e classe di precisione $c = 0,5\%$ può presentare una massima deviazione in ogni punto della scala di $(0,5/100) \times 500 = 2,5$ V.

Espresso in termini relativi rispetto al valore letto (V_L), questo contributo assume quindi un valore minimo in corrispondenza del fondoscala e cresce al diminuire della grandezza, come riportato in Fig.2.1, che lo presenta in termini percentuali, cioè calcolato come $I_{\%} = 100 \cdot I_{\max} / V_L$.

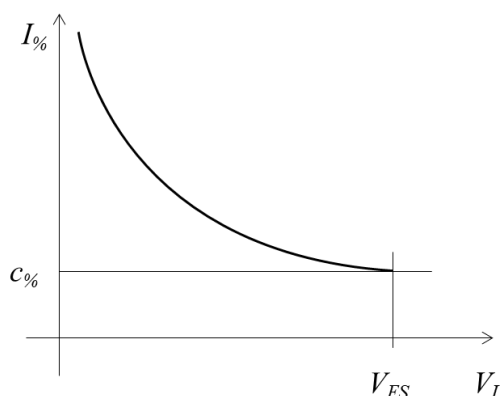


Fig.2.1 – Valore percentuale della massima deviazione definita dalla classe di precisione.

Altre volte viene fornita un'indicazione dell'incertezza strumentale con due termini (I_1 e I_2), spesso espressi in termini percentuali: il primo ($i_1\%$) legato al valore di fondoscala (V_{FS}), il secondo ($i_2\%$) legato al valore letto (V_L). In tal caso la massima deviazione assoluta complessiva è esprimibile nel seguente modo:

$$I_{totale} = I_1 + I_2 = \frac{1}{100} (i_1\% V_{FS} + i_2\% V_L) \quad (2.2)$$

A titolo di esempio si consideri un voltmetro impiegato sulla portata di 100 V e le cui sue specifiche di accuratezza sono espresse come: ($0,02\% V_{FS} + 0,1\% V_L$). Ipotizzando che il display indichi 87 V, la massima deviazione complessiva sulla misura risulta: $(0,02 \times 100 + 0,1 \times 87) / 100 = 0,107$ V.

Spesso, per gli strumenti digitali, la componente dell'incertezza costante su tutta la scala, ossia indipendente dal valore letto, che definisce il termine I_1 nell'eq. (2.2), viene assegnata in termini di numero di cifre o conteggi (*digit* o *count*).

In tal caso, detto x il numero di *digit* dichiarato dal costruttore per esprimere il contributo di incertezza legato al fondoscala V_{FS} e detto N_{FS} il numero totale di conteggi che sono indicati a fondoscala, risulta:

$$I_1 = x \frac{V_{FS}}{N_{FS}} \quad i_1\% = 100 \frac{I_1}{V_{FS}} = 100 \frac{x}{N_{FS}} \quad (2.3)$$

Per esempio, si consideri uno strumento con display a 3 ½ cifre e si supponga che questo display possa rappresentare al massimo il valore 1999. Ipotizzando che nelle specifiche di accuratezza di questo strumento la componente costante sia di 5 digit, questa componente, espressa in percento del fondoscala, sarà pari a $100 \times (5/2000) = 0,25\%$.

Reciprocamente, si consideri ora uno strumento che abbia un display a 4 ½ cifre, che possa indicare al massimo il valore di 19999. Se nelle sue specifiche di accuratezza il termine costante ($i_1\%$) è dello 0,02% del fondoscala, questa corrisponde in termini di digit a $(0,02/100) \times 20000 = 4$ digit.

La Fig.2.2 riporta la deviazione totale definita in (2.2) e i suoi due contributi al variare del valore letto.

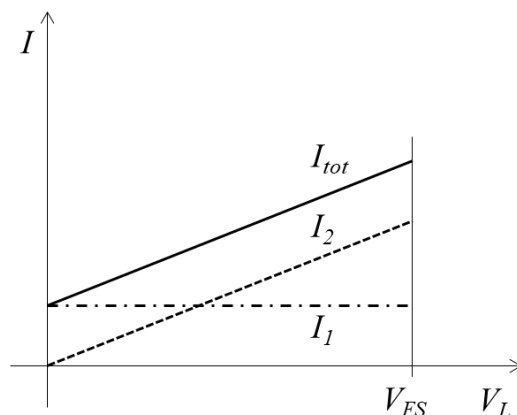


Fig.2.2 – Andamento dei valori assoluti dei contributi definiti nelle specifiche dei multimetri

La Fig. 2.3 riporta l'andamento degli stessi contributi della Fig.2.3, ma espressi in termini percentuali rispetto al valore letto, evidenziando come i contributi di incertezza legati al fondoscala intervengano con lo stesso valore assoluto in ogni punto del campo di misura, determinando possibili errori relativi consistenti sui valori letti all'inizio della portata

Pertanto, è buona norma, qualunque sia il tipo di strumento, fare le misure il più possibile verso il fondoscala.

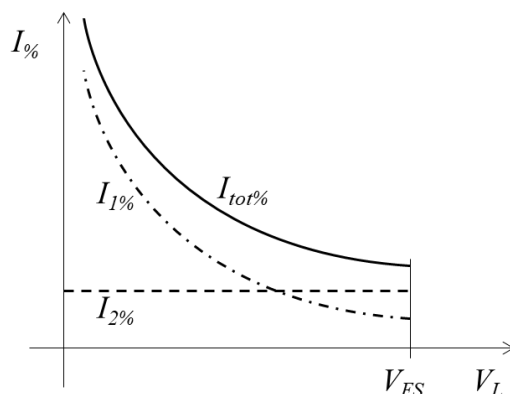


Fig.2.3 – Andamento dei valori relativi dei contributi definiti nelle specifiche dei multimetri

Note su risoluzione e accuratezza

La risoluzione e l'accuratezza non devono essere confuse. Negli strumenti digitali, con visualizzazione numerica, la risoluzione rappresenta solo il peso dell'ultima cifra, mentre l'accuratezza rappresenta la qualità complessiva della misura, di cui la risoluzione costituisce solo uno degli elementi. Le loro differenze si notano anche dal punto di vista numerico.

Per esempio, un multimetro digitale può presentare, nelle misure di tensione, un'accuratezza indicata mediante le seguenti specifiche:

In DC: $\pm (0,05\% V_L + 2 \text{ digit})$.

In AC (20-50 Hz): $\pm (1\% V_L + 30 \text{ digit})$.

Si osserva che la sola incertezza legata al numero di cifre (digit) è ben maggiore della risoluzione, soprattutto per le misure in corrente alternata.

Precisione

Il termine precisione (*precision*) è molto diffuso, ma non è sinonimo di accuratezza.

Per chiarire, osserviamo che, misurando la medesima grandezza fisica in successive operazioni di misura, i valori numerici ottenuti possono essere più o meno discosti fra loro. Il fatto di ottenere valori misurati molto vicini fra loro è un indice della precisione delle misure.

Con riferimento alla Fig.2.4, l'insieme delle misure del caso A) presenta dei risultati più dispersi rispetto a quelli del caso B). Tuttavia, nel processo di misura B) si riconosce la presenza di una causa sistematica che determina un consistente errore sempre dello stesso segno (potrebbe essere un offset). Il valore medio delle misure così ottenute nel caso B) risulta allora assai discosto dal vero valore del misurando. In tale circostanza non si ottengono risultati accurati, ossia ben approssimati al vero valore del misurando. Il caso A), nel complesso, ha un valore medio più vicino al valore vero, ossia fornisce una misura più accurata.

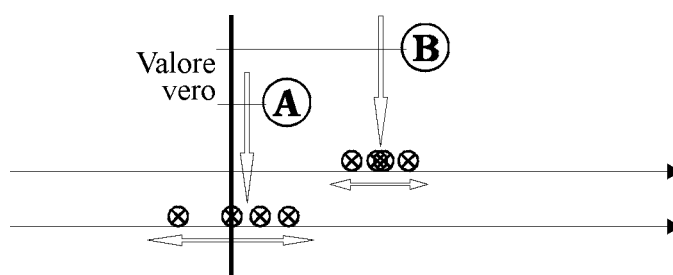


Fig.2.4 - Esempio che illustra la precisione.

Affinché una determinazione sperimentale sia accurata deve essere necessariamente precisa, mentre non è vero il viceversa. Con un significato vicino, ma definito meglio, rispetto a quello del termine "precisione" vengono nella pratica usati altri due termini:

Ripetibilità: è il grado di accordo ottenuto fra misure successive dello stesso misurando, effettuate nelle medesime condizioni: la stessa procedura, lo stesso osservatore, lo stesso strumento, lo stesso luogo, entro un breve lasso di tempo.

Riproducibilità: è il grado di accordo ottenuto fra misure successive dello stesso misurando, effettuato in diverse condizioni, da specificarsi: diverso metodo di misura, diverso campione di riferimento, diverse condizioni d'uso, diverso luogo e tempo, diverso operatore.

3 - Effetto dell'inserzione di uno strumento

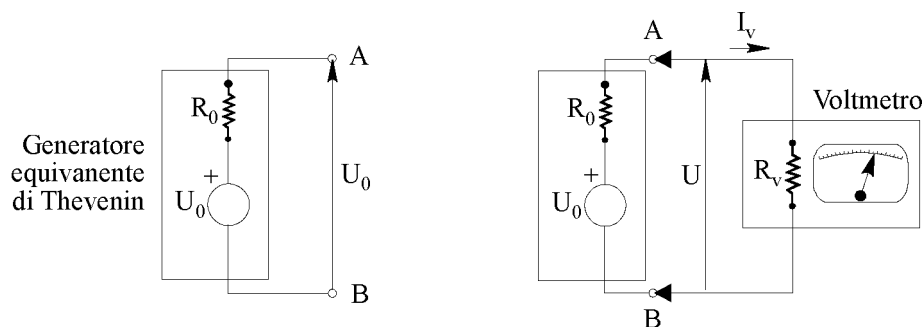
Inserzione del voltmetro

Per rendersi conto di ciò che accade all'inserzione di un voltmetro, quando si misura la tensione presente fra due punti A e B di una rete elettrica applicando i suoi puntali su A e su B (vedi Fig.3.1), si consideri il bipolo equivalente di Thevenin della rete stessa.

Indichiamo con U_0 il valore della tensione che vorremmo misurare, mentre R_0 è la resistenza propria del generatore equivalente.

Quando il voltmetro viene collegato, si forma un circuito dove può circolare la corrente I_v .

La corrente $I_v = U_0/(R_0+R_v)$, assorbita con l'inserzione di un voltmetro, costituisce un'azione di disturbo per il circuito (effetto di carico strumentale).

**Fig.3.1** - Inserzione di un voltmetro.

Affinché la corrente I_v richiesta dallo strumento risulti trascurabile, la resistenza interna R_v del voltmetro deve essere molto maggiore di R_0 . Infatti, per effetto dell'inserzione, la tensione U effettivamente misurata dal voltmetro risulta:

$$U = I_v R_v = U_0 \frac{R_v}{R_0 + R_v} \quad (3.1)$$

L'errore relativo ε_U rispetto al valore U_0 a vuoto è quindi:

$$\varepsilon_U = \frac{\Delta U}{U_0} = \frac{U - U_0}{U_0} = \frac{R_v}{R_0 + R_v} - 1 \quad (3.2)$$

Si consideri, per esempio, un generatore equivalente con tensione a vuoto $U_0 = 150 \text{ V}$ e

resistenza interna $R_0 = 80 \text{ k}\Omega$ e si voglia misurare tale tensione con un voltmetro di resistenza interna R_v di $3 \text{ M}\Omega$.

Il valore di tensione realmente misurato è $U = 150(3000/3080) = 146,104 \text{ V}$.

L'errore assoluto ΔU dovuto all'inserzione è $(U - U_0) = (146,104 - 150) = -3,896 \text{ V}$.

L'errore relativo ε_U risulta: $-3,896/150 = -0,026$ (equivalente a $-2,60 \%$).

Inserzione dell'amperometro

Per analizzare l'effetto dell'inserzione di un amperometro, che, per misurare la corrente presente in un ramo di una rete elettrica, viene connesso in serie sul circuito, si consideri il carico R_c di Fig.3.2 attraversato dalla corrente costante I_c e quindi alimentato dalla tensione $U_c = R_c I_c$.

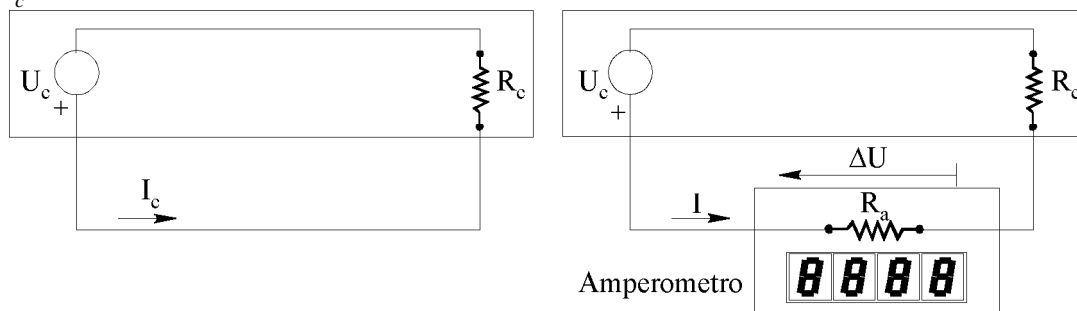


Fig.3.2 - Inserzione di un amperometro.

L'inserzione dell'amperometro con la sua resistenza interna R_a causa una modificazione del circuito, provocando la caduta di tensione ΔU e determinando la circolazione di una corrente I diversa da quella precedente I_c . La nuova corrente risulta:

$$I = \frac{U_c}{R_c + R_a} = I_c \frac{R_c}{R_c + R_a} \quad (3.3)$$

L'errore relativo ε_I rispetto al valore I_c preesistente è quindi:

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I_c} = \frac{I - I_c}{I_c} = \frac{R_c}{R_c + R_a} - 1 \quad (3.4)$$

che risulta formalmente simile alla relazione trovata per un voltmetro.

Affinché lo strumento non disturbi apprezzabilmente il circuito deve risultare R_a molto minore di R_c .

Si supponga, per esempio, un valore della resistenza di carico $R_c = 2 \Omega$ e un valore della corrente $I_c = 10 \text{ A}$. Il generatore di alimentazione ha pertanto il valore $U_c = 10 \times 2 = 20 \text{ V}$.

Si impieghi per la misura di tale corrente un amperometro con resistenza interna $R_a = 0,1 \Omega$.

Il valore della corrente realmente misurata dallo strumento risulta $I = 20/2,1 = 9,524 \text{ A}$.

L'errore assoluto ΔI dovuto all'inserzione è $(I - I_c) = (9,524 - 10) = -0,476 \text{ A}$.

L'errore relativo ε_I risulta: $-0,476/10 = -0,0476$ (equivalente a $-4,76 \%$).

Nota

Gli errori così determinati, per l'inserzione di un voltmetro e di un amperometro, non sono imputabili a carenze degli strumenti ma dipendono dalle oggettive condizioni di misura e dalla perturbazione introdotta dagli strumenti nel circuito sotto esame.

Questi errori, che sono di tipo sistematico in quanto si manifestano sempre con lo stesso valore e lo stesso segno, possono essere corretti se sono noti i parametri circuitali. La conoscenza esatta di tali parametri risulta però difficile, quando non impossibile. In ogni caso, a causa della tolleranza con cui i valori delle resistenze potrebbero essere noti, l'eventuale compensazione non potrebbe mai essere perfetta e lascerebbe sempre un margine d'errore, di tipo aleatorio, sul risultato della misura.

In pratica, ci si mette normalmente nelle condizioni in cui tali errori risultino trascurabili rispetto alle altre cause di incertezza.

Gli esempi trattati (con i risultati piuttosto scoraggianti) sono dei casi limite che risulta abbastanza agevole evitare nella pratica.

Più realisticamente, per l'esempio con il voltmetro, si potrebbero assumere i seguenti valori:

- Generatore equivalente con tensione a vuoto $U_0 = 150$ V e resistenza interna $R_0 = 100$ Ω .
- Voltmetro con resistenza interna R_v di 100 M Ω .
- Il valore di tensione realmente misurato sarebbe stato:

$$U = U_0 \cdot [R_v / (R_v + R_0)] = 150(100\,000\,000 / 100\,000\,100) = 149,999\,850 \text{ V.}$$

L'errore assoluto è: $\Delta U = U - U_0 = (149,999\,850 - 150) = -1,5 \cdot 10^{-4}$ V = 150 μ V.

L'errore relativo è: $\varepsilon_U = \Delta U / U_0 = -1,5 \cdot 10^{-4} / 150 = -1 \cdot 10^{-6}$, che corrisponde a -1 ppm!

Analogamente, per l'esempio dell'amperometro, supponiamo che le condizioni prima dell'inserzione siano le seguenti:

- Corrente $I_c = 10$ A e resistenza del circuito $R_c = 22$ Ω (generatore $U_c = 10 \cdot 22 = 220$ V).
- Amperometro con resistenza interna $R_a = 0,1$ Ω .
- Il valore della corrente realmente misurato sarebbe stato:

$$I = U_c / (R_c + R_a) = 220 / 22,1 = 9,955 \text{ A.}$$

L'errore assoluto è: $\Delta I = I - I_c = (9,955 - 10) = -0,045$ A.

L'errore relativo è: $\varepsilon_I = \Delta I / I_c = -0,045 / 10 = -4,5 \cdot 10^{-3}$, che corrisponde a -0,45 %.

verifica o la taratura dello strumento.