

# L'incertezza di misura

## 1 - La norma internazionale

---

### Introduzione

Poiché l'espressione dell'incertezza di misura non era uniforme a livello internazionale, il CIPM (Comitè International de Poids et Mesures) promosse negli anni Ottanta un'indagine dettagliata con il compito di individuare le linee guida per l'espressione dell'incertezza sperimentale.

Il compito di sviluppare una Norma articolata venne successivamente conferito all'ISO (International Standard Organization), il quale istituì il gruppo di lavoro ISO-TAG 4 (Technical Advisory Group on Metrology) formato da:

CIPM	Comitè International de Poids et Mesures
ISO	International Standard Organization
IEC	International Electrotechnical Commission
OIML	Organization Internationale de Métrologie Legale
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics
IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry
IFCC	International Federation of Clinical Chemistry

Lo scopo del gruppo di lavoro era essenzialmente quello di:

- Promuovere una completa informazione sul come vengono dichiarate le incertezze.
- Fornire una base per il confronto internazionale dei risultati delle misurazioni.

Frutto di tale lavoro fu la pubblicazione nel 1995 della:

*ISO Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)*

Recepita in Italia nel 1997 come Norma UNI-CEI 9 (revisione UNI CEI ENV 13005):

*Guida all'espressione dell'incertezza di misura*

### Obiettivi

Nelle applicazioni industriali e commerciali, della sanità come della sicurezza, è necessario fornire un intervallo intorno al risultato della misurazione entro il quale ci si possa aspettare che cada gran parte dei valori che sono ragionevolmente ascrivibili a quella grandezza.

Sarebbe opportuno riuscire ad assegnare tale intervallo con una probabilità di copertura, o livello di fiducia, che corrisponda realisticamente a quello richiesto.

Per avvicinarsi a tale obiettivo, la Guida stabilisce, piuttosto che istruzioni tecnologiche specifiche, delle regole generali per esprimere l'incertezza di misura.

In tal modo si è voluto indirizzare il documento a contesti anche molto diversi fra loro.

Fra i campi di applicazione della Guida vengono segnalati:

- mantenere il controllo e la garanzia della qualità nella produzione;
- garantire la conformità a leggi e regolamenti o imporne il rispetto;
- condurre la ricerca di base, applicata o di sviluppo, nella scienza e nell'ingegneria;

- tarare campioni e strumenti ed effettuare prove nell'ambito di un Sistema Nazionale di Taratura, per conseguire la riferibilità ai campioni nazionali;
- sviluppare, mantenere e confrontare campioni di riferimento internazionali e nazionali, compresi i materiali di riferimento.

L'incertezza del risultato di una misurazione costituisce, in fondo, la mancanza di una conoscenza esatta del misurando. Così il risultato di una misurazione, quand'anche riuscissimo a correggere effetti sistematici identificati, costituisce sempre una stima del valore del misurando. L'incertezza sperimentale è dovuta a numerosi fattori, fra i quali:

- definizione incompleta del misurando;
- imperfetta realizzazione del misurando;
- non rappresentatività della campionatura;
- inadeguata conoscenza delle condizioni ambientali o dei loro effetti sulla misurazione;
- distorsione personale dell'operatore nella lettura di strumenti analogici;
- risoluzione finita degli strumenti;
- valori non esatti dei campioni e dei materiali di riferimento;
- valori non esatti delle costanti e dei parametri usati per gli algoritmi di valutazione;
- approssimazioni o semplificazioni del metodo o del procedimento sperimentale;
- variazioni del misurando in condizioni apparentemente identiche.

Tutti questi fattori, inoltre, non sempre sono indipendenti.

La Guida raggruppa le componenti di incertezza in due categorie, a seconda del metodo di valutazione:

componenti valutate con metodi statistici (tipo A);

componenti valutate con altri metodi (tipo B).

## 2 – Elementi di statistica e probabilità

### Osservazioni ripetute

Supponiamo di voler conoscere una grandezza fisica  $X$ , raccogliendo allo scopo una serie di misure, ripetute nelle stesse condizioni sperimentali.

Siano  $N$  i valori misurati ( $x_1, x_2, \dots, x_k \dots, x_N$ ), dove  $x_k$  è il generico valore di una misurazione.

Questi valori non saranno tutti uguali, per numerosi motivi, come già detto.

Definiamo allora il *valor medio* per l'insieme dei valori misurati:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (2.1)$$

È ragionevole ritenere che il valore medio di un insieme di  $N$  misure costituisca la *stima* migliore del vero valore della grandezza in esame.

Per ciascuna misura  $x_k$ , potremo considerare la *deviazione dal valor medio*:

$$\delta_k = x_k - \bar{x} \quad (2.2)$$

Le deviazioni possono essere di valore sia positivo che negativo.

Appare interessante ricercare un indice complessivo dell'entità di tali scostamenti. Tale indice non può essere il valore medio degli scostamenti, in quanto questo valore è ovviamente nullo, come si evince facilmente facendo la media di entrambi i termini dell'espressione (2.2).

Risulta più idoneo un indice quadratico, come la varianza.

Definiamo *varianza* sperimentale dell'insieme di  $N$  misure il valore medio del quadrato delle deviazioni:

$$s^2(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2 \quad (2.3)$$

Da questa varianza si deduce lo *scarto tipo sperimentale*:

$$s(x_k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_k^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (2.4)$$

Lo scarto tipo, o deviazione standard, rappresenta un indice *appropriato* della dispersione delle misure attorno al valore medio. La sua definizione sarà tuttavia affinata in seguito, considerando che le  $N$  misure non rappresentano l'insieme (*popolazione*) di tutte le misure ma solo un *campione* limitato dell'infinità di misure eseguibili.

### Istogrammi delle osservazioni

I risultati di numerose misure ripetute sulla stessa grandezza possono essere graficamente rappresentati su opportuni diagrammi, detti istogrammi. Questi si costruiscono con alcune semplici operazioni:

- si individuano i valori massimo ( $x_{max}$ ) e minimo ( $x_{min}$ ) tra le  $N$  misure della grandezza  $X$ ;
- si divide l'intervallo ( $x_{max} - x_{min}$ ) in un numero  $M$  di intervallini di uguale ampiezza, ciascuno dei quali può essere identificato col suo valore centrale  $x_i$  ( $i=1, \dots, M$ );
- si conta il numero  $n_i$  delle misure che ricadono in ciascun intervallino;
- si calcola la frequenza di osservazione dividendo questo numero per il numero totale delle osservazioni  $N$ :

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, M) \Rightarrow \sum_{i=1}^M f_i = 1 \quad (2.5)$$

- si rappresenta su un grafico il valore del numero delle osservazioni relative a ciascun intervallo, oppure la corrispondente frequenza.

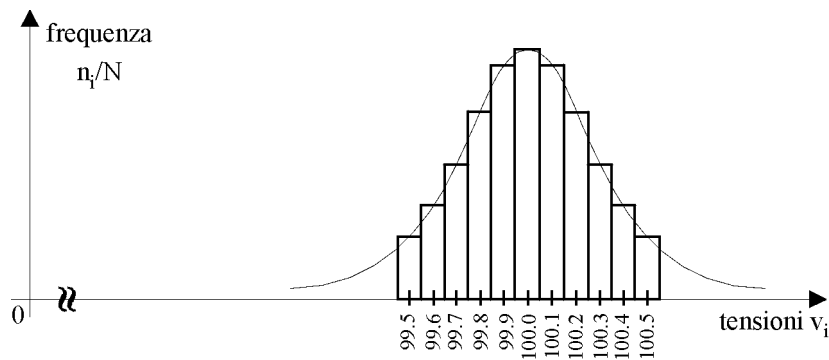
Per comprendere il modo di operare, si consideri, come esempio, la misura ripetuta di una tensione  $V$ , eseguita con uno strumento numerico che consente di rappresentare sul display solo una cifra dopo il punto decimale.

Operando su portate di volt, la minima differenza fra due letture distinte è perciò 0,1V.

La generica indicazione  $v_k$  dello strumento di misura può aversi per qualsiasi valore di tensione compreso entro l'intervallo  $v_k \pm 0,05$  V. In tal modo tutti i valori compresi in questo intervallo vengono automaticamente raggruppati dallo strumento in un unico valore  $v_i$ , rappresentativo dell'intervallo stesso.

Supponiamo, per fissare le idee, che i valori misurati siano tutti compresi nell'intervallo 99,5V ÷ 100,5V: il numero  $M$  dei valori distinti delle misure risulta pari a 11. Poiché molte misurazioni porteranno allo stesso valore, indichiamo con  $n_i$  il numero di volte che si presenta il valore  $v_i$ .

Il risultato delle prove può essere riassunto in un istogramma che, per ciascuno degli 11 valori possibili, riporta il numero di osservazioni  $n_i$  che cadono nella *i-esima* classe  $v_i$ . In alternativa (vedi Fig.2.1), se  $N$  è il numero totale di osservazioni, si può rappresentare direttamente la frequenza con cui si ripete il valore della classe  $v_i$ .



**Fig.2.1-** Istogramma del numero di osservazioni.

La somma di tutte le frequenze di occorrenza  $f_i$  deve risultare evidentemente pari a uno. Con riferimento alle frequenze  $f_i$ , il valor medio e la varianza possono risciversi nella forma:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k = \sum_{i=1}^M x_i \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^M x_i f_i \quad (2.6)$$

$$s^2(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_k^2 = \sum_{i=1}^M \delta_i^2 \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^M \delta_i^2 f_i \quad (2.7)$$

essendo  $\delta_i = x_i - \bar{x}$  lo scostamento della  $i$ -esima classe rispetto al valore medio.

### Concetto di probabilità e parametri statistici

Se fosse possibile effettuare sulla stessa grandezza fisica  $X$  un numero  $N$  di misure infinitamente grande, le frequenze di occorrenza dei diversi valori rappresenterebbero le probabilità della intera popolazione.

L'insieme delle misure può allora essere visto come una variabile aleatoria discreta  $X$ , dove ciascuno dei possibili valori  $x_i$  è caratterizzato dalla sua probabilità di occorrenza:

$$\text{Prob}(x_i) = P(x_i) = P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} f_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N} \quad (2.8)$$

Se si infittisce il passo di osservazione (nell'esempio del voltmetro ciò equivarrebbe ad aumentare la risoluzione dello strumento impiegato per le misure) la distribuzione delle osservazioni mantiene lo stesso andamento e l'istogramma tende ad assumere un aspetto continuo.

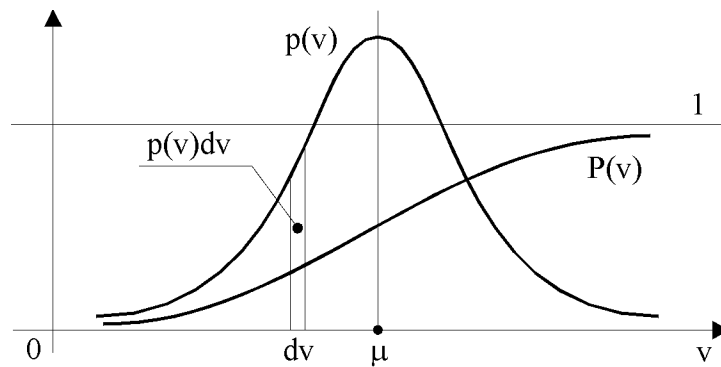
Si definisce densità di probabilità  $p(x)$  quella funzione continua che, moltiplicata per una variazione infinitesima  $dx$  dell'ascissa, fornisce la probabilità che la variabile aleatoria  $X$  cada entro l'intervallo di ampiezza  $dx$ , contiguo al valore corrente  $x$ :

$$\text{Prob}[x \leq X < (x + dx)] = p(x)dx \quad (2.9)$$

La probabilità cumulativa  $P(x)$  è invece la probabilità che la variabile aleatoria  $X$  sia minore del valore corrente  $x$ :

$$\text{Prob}[X < x] = P(x) = \int_{-\infty}^x p(z)dz \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \quad (2.10)$$

Le funzioni introdotte con le relazioni precedenti rappresentano le distribuzioni di probabilità della variabile casuale  $X$ . Il diagramma mostrato in Fig. 2.2 riporta in ascisse i possibili valori continui  $x$  della variabile aleatoria  $X$  e in ordinate la densità di probabilità  $p(x)$  con cui si osservano tali valori e la probabilità cumulativa  $P(x)$ . La Fig. 2.2 si riferisce, a titolo di esempio, al caso di una curva *normale*, o Gaussiana, in quanto molti fenomeni fisici, interessati solo da errori casuali, se osservati un numero di volte molto grande obbediscono a una legge di occorrenza degli eventi di questo tipo.



**Fig.2.2** - Densità di probabilità  $p(x)$  e probabilità cumulativa  $P(x)$ .

La probabilità che la variabile aleatoria  $X$  assuma un valore qualsiasi, compreso entro tutto il campo di definizione, è pari a uno.

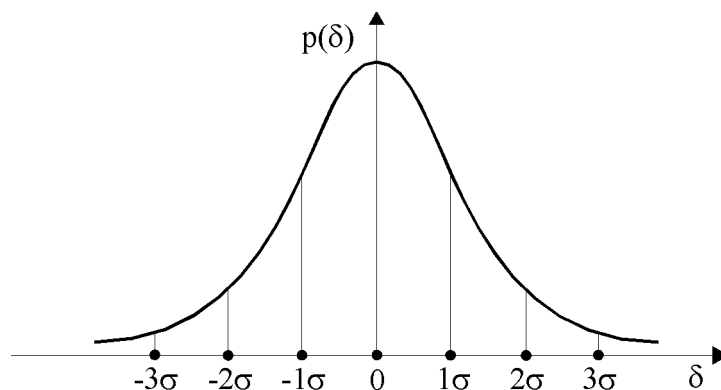
Nota la densità di probabilità  $p(x)$  di una variabile aleatoria continua  $X$  si definiscono il valore medio e la varianza, rispettivamente come:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (2.11)$$

Si noti la sostanziale analogia delle diverse relazioni, nel caso delle variabili aleatorie discrete (relazioni 2.6 e 2.7) e continue (relazioni 2.11).

La radice quadrata della varianza è ancora definita come scarto tipo o deviazione standard  $\sigma$ . Talvolta la densità di probabilità  $p(x)$  è riferita, anziché ai valori  $x$  delle misure, alle loro deviazioni  $\delta = (x - \mu)$ , tramite una semplice traslazione pari al valor medio (vedi Fig.2.3).

In tal modo, nota la densità di probabilità delle deviazioni  $p(\delta)$ , può essere valutata la probabilità che la variabile aleatoria  $\Delta$  sia compresa entro un assegnato intervallo di valori.



**Fig.2.3** - Densità di probabilità delle deviazioni.

### Valori caratteristici

Gli intervalli usuali sono riferiti allo scarto tipo  $\sigma$  o a suoi multipli.

Per la curva *normale* si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[-\sigma \leq \Delta < +\sigma] &= 68,27 \% \\ \text{Prob}[-2\sigma \leq \Delta < +2\sigma] &= 95,45 \% \\ \text{Prob}[-3\sigma \leq \Delta < +3\sigma] &= 99,73 \% \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ciò significa che assumendo, per esempio, un intervallo di riferimento pari a  $3\sigma$ , la probabilità che tutti gli scarti possibili cadano entro l'intervallo  $\pm 3\sigma$  è del 99,73%.

## 3 - Valutazione delle incertezze

### Stime di parametri da campioni

Parlando di variabili aleatorie si è detto che la valutazione delle probabilità presuppone un'indagine su un numero teoricamente infinito di elementi, costituenti l'intera *popolazione*.

All'atto pratico sarà possibile raccogliere solo un numero limitato di dati, costituenti un *campione* dell'intera popolazione.

Con riferimento a un campione di  $N$  elementi, si dimostra che il valor medio sperimentale, definito nell'espressione (2.1), costituisce la stima migliore del valore atteso  $\mu$  della popolazione e pertanto viene assunto come risultato della misura. Per quanto riguarda invece lo scarto tipo  $\sigma$ , una stima più corretta si ottiene dividendo per  $(N-1)$ , anziché per  $N$  nell'espressione dello scarto tipo sperimentale:

$$s(x_k) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (3.1)$$

In pratica, tuttavia, questa precisazione assume scarso rilievo quando  $N$  sia abbastanza grande. In ogni caso, la deviazione standard sperimentale  $s(x_k)$  rappresenta il grado di attendibilità della generica misura  $x_k$  fra le  $N$  del campione, o, in altri termini, quantifica la dispersione degli  $N$  valori misurati attorno al loro valore medio.

Ma, dal momento che il valore assegnato alla grandezza è il valore medio sperimentale  $\bar{x}$ , è importante valutare quale sia il grado di attendibilità di questo risultato.

A tale scopo, se considerassimo diverse serie di misure, ciascuna formata da  $N$  osservazioni, potremmo calcolare evidentemente, per ciascuna serie, il valore medio e la varianza.

Vista la dimensione finita  $N$  di ciascun campione, il valore medio e la varianza sperimentali saranno in generale diversi per ogni campione di  $N$  misure e costituiranno perciò delle variabili aleatorie a loro volta.

Si dimostra che la varianza e lo scarto tipo del valor medio, fra i vari gruppi di  $N$  misure, sono esprimibili nel seguente modo:

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x_k)}{N} \quad \Rightarrow \quad s(\bar{x}) = \frac{s(x_k)}{\sqrt{N}} \quad (3.2)$$

Lo scarto tipo  $s(x_k)$  costituisce una stima della deviazione standard  $\sigma$  di tutta la popolazione.

### Valutazione dell'incertezza di tipo A

La varianza sperimentale della media  $s^2(\bar{x})$  e lo scarto tipo sperimentale della media  $s(\bar{x})$ , quantificano quanto bene  $\bar{x}$  stimi il valore medio  $\mu$  della popolazione (valore atteso) e pertanto verranno adottati come valutazioni quantitative della incertezza di  $\bar{x}$ .

Diremo quindi che una grandezza fisica  $X$  determinata con  $N$  osservazioni ripetute avrà una incertezza (*uncertainty*) sulla sua stima  $\bar{x}$  pari a:

$$u^2(x) = s^2(\bar{x}) \quad \text{in termini di varianza} \quad ; \quad u(x) = s(\bar{x}) \quad \text{in termini di scarto tipo}$$

### Valutazione dell'incertezza di tipo B

Quando un contributo di incertezza non viene determinato mediante osservazioni ripetute, la varianza stimata  $u^2(x)$  o l'incertezza  $u(x)$  sono valutate per mezzo di un giudizio scientifico basato su tutte le altre informazioni disponibili:

- dati di misurazioni precedenti;
- esperienza o conoscenza del comportamento e delle proprietà dei materiali e degli strumenti;
- specifiche tecniche del costruttore;
- dati forniti in certificati di taratura;
- incertezze assegnate a valori di riferimento presi da manuali.

L'uso di tali informazioni per una valutazione di incertezza di tipo B richiede conoscenza, esperienza e perizia che possono acquisirsi solo con la pratica e quindi col tempo.

L'analisi statistica sulle misure è un'indagine che viene fatta usualmente durante le procedure di taratura di uno strumento, quando ne vengono determinate le caratteristiche metrologiche.

Il certificato di taratura accompagna il singolo strumento nel suo impiego e chi lo utilizza sa che le indicazioni fornite possono avere un'incertezza compresa entro l'intervallo dichiarato sul certificato di taratura, con un assegnato livello di confidenza.

Più spesso, i costruttori di strumentazione assegnano le specifiche di accuratezza con valori numerici validi per tutti gli esemplari di un dato modello e per essi dichiarano semplicemente un intervallo di ampiezza  $(-a, +a)$ , centrato sul valore letto, entro il quale si ritiene che cada il valore del misurando. In tal caso, per poter calcolare il valore dell'incertezza in termini di varianza o di deviazione standard, in modo da avere a disposizione un'informazione confrontabile con quella ottenuta con la valutazione di tipo A, è necessario ipotizzare la distribuzione di probabilità da considerare all'interno dell'intervallo.

Nella maggior parte dei casi è prassi comune assumere all'interno di questo intervallo una distribuzione di probabilità uniforme. Pertanto, detto  $z$  il generico scostamento in tale intervallo, si ha  $p(z)=1/2a$  e la varianza della misura  $x$  è:

$$u^2(x) = \int_{-a}^a z^2 p(z) dz = \int_{-a}^a z^2 \frac{1}{2a} dz = \frac{1}{3} a^2 \quad (3.3)$$

L'incertezza associata alla quantità  $x$  risulta quindi:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (3.4)$$

L'ipotesi di distribuzione uniforme è piuttosto pessimistica, ma è anche quella suggerita dalla GUM in mancanza di ulteriori informazioni.

Se invece fosse possibile ipotizzare che non tutti i valori dell'intervallo  $(-a, +a)$  sono

ugualmente probabili, ma al contrario quelli più centrali hanno maggiori probabilità di verificarsi, si potrebbe assumere una distribuzione di tipo gaussiano. In questo caso si dovrebbe considerare il valore  $a$  come quello per il quale l'intervallo  $(-a, +a)$  contiene la quasi totalità dei valori possibili e quindi, sulla base delle relazioni (2.12),  $a$  sarebbe pari a tre volte la deviazione standard della distribuzione ipotizzata. Conseguentemente, l'incertezza associata alla quantità  $x$  risulterebbe:

$$u(x) = \frac{a}{3} \quad (3.5)$$

Un caso intermedio tra i due esaminati è quello di assumere una distribuzione di probabilità triangolare, con valore massimo pari a  $1/a$  in corrispondenza del valore centrale dell'intervallo. Ciò porterebbe ad un'incertezza, espressa ancora in termini di deviazione standard, pari a:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad (3.6)$$

### Combinazione delle incertezze

La definizione dello scarto tipo o della varianza si rivela particolarmente utile nell'analisi della combinazione delle incertezze di più fenomeni aleatori, cioè nella valutazione della incertezza di quantità determinate in modo indiretto:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

In tal caso ciascuna delle grandezze indipendenti  $x_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) viene considerata una variabile aleatoria, pertanto caratterizzata con la sua densità di probabilità (calcolata oppure ipotizzata a priori) ed i suoi parametri statistici. Le varianze delle variabili aleatorie rappresentano, come detto, le loro incertezze  $u^2(x_i)$ , che possono essere valutate indifferentemente con metodi di tipo A o B. Si dimostra che, se le variabili aleatorie sono tutte fra loro *statisticamente indipendenti*, l'incertezza stimata sulla determinazione indiretta della quantità  $y$ , risulta:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} \quad (3.7)$$

Il valore  $u_c(y)$  viene detto *incertezza tipo composta* associata alla grandezza  $y$ .

La legge di propagazione (3.7) è di grande utilità nella valutazione di incertezze su grandezze misurate per via indiretta. Tuttavia la sua applicazione pratica risulta in molti casi difficoltosa a causa della difficile valutazione delle derivate parziali della funzione  $f$  (i cosiddetti *coefficienti di sensibilità*  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ). Questo si verifica quando la funzione non è definita in forma

chiusa o quando è costituita da un algoritmo di elaborazione del segnale complesso. In questi casi occorre utilizzare metodi alternativi, come quelli sperimentali o simulazioni.

Inoltre, in presenza di correlazione fra le variabili di ingresso, la relazione (3.7) deve essere modificata con la presenza di opportuni termini aggiuntivi:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} \quad (3.8)$$

In (3.8) il termine  $u(x_i, x_j)$  rappresenta la *covarianza* tra le variabili aleatorie  $x_i$  e  $x_j$ , ed è

un'indicazione della loro mutua dipendenza. Se le due grandezze sono state ottenute sulla base di  $N$  misure, la covarianza tra le loro medie può essere stimata come:

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j) \quad (3.9)$$

Spesso, la dipendenza tra due variabili aleatorie è espressa in termini di *coefficiente di correlazione*:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad (3.10)$$

Questo coefficiente è sempre compreso tra  $-1$  e  $1$  ed è nullo se le due grandezze non sono tra loro correlate, mentre è unitario se sono totalmente correlate, cioè se ad ogni variazione di una di esse corrisponde una determinata variazione dell'altra.

E' importante osservare che, mentre nella sommatoria della relazione (3.7) tutti i termini sono quadratici e quindi positivi, nella seconda sommatoria della (3.8) possono esistere termini sia positivi che negativi. Quindi la presenza di eventuali correlazioni tra le variabili di ingresso può comportare sia incrementi che riduzioni dell'incertezza composta.

La correlazione tra due grandezze può essere insita nel modello matematico utilizzato oppure può essere causata dalle condizioni ambientali. Spesso la sua determinazione quantitativa risulta difficile, soprattutto per misure non ripetute, per le quali non si può applicare la (3.9). Talvolta queste difficoltà inducono a trascurare questi contributi, introducendo però nella valutazione dell'incertezza approssimazioni non sempre accettabili.

### Incertezza estesa

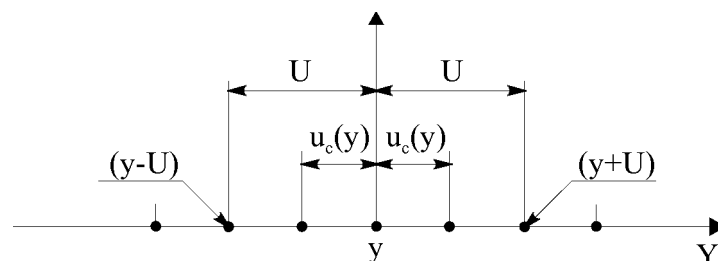
L'incertezza composta  $u_c(y)$  viene universalmente accettata per esprimere l'incertezza di una misurazione.

In certi casi, tuttavia, si richiede che la valutazione quantitativa dell'incertezza venga data come un intervallo  $U$  intorno al risultato della misurazione che comprenda "ragionevoli" valori del misurando. Tale intervallo è denominato incertezza estesa e si ottiene moltiplicando l'incertezza composta  $u_c(y)$  per un fattore di copertura  $k$ :

$$U = k \cdot u_c(y) \quad (3.11)$$

Perciò diremo che il misurando  $Y$  sarà stimato nel modo migliore dal risultato della misurazione  $y$ , che gli viene attribuito nella forma:  $Y = y \pm U$ .

Il fattore di copertura  $k$  viene scelto in base al livello di fiducia  $p$  che viene richiesto all'intervallo  $[(y-U) \div (y+U)]$ .



**Fig.3.1** - Incertezza composta  $u_c(y)$  ed estesa  $U$  ( $k=2$ ).

Il livello di fiducia  $p$  rappresenta la probabilità di copertura di questo intervallo, cioè la probabilità che il risultato dichiarato cada entro l'intervallo  $[(y-U) \div (y+U)]$ .

Il legame fra  $k$  e  $p$  può essere stabilito se sono note le distribuzioni di probabilità che caratterizzano i risultati della misurazione. In pratica, quindi, non è facile determinare un legame rigoroso. Un metodo semplice, adeguato a molte situazioni sperimentali, ipotizza la distribuzione delle probabilità di tipo normale o gaussiano e considera un numero di gradi di libertà sufficientemente elevato. Il numero di gradi di libertà è costituito dal numero di termini di una somma (per esempio medie o varianze) meno il numero di vincoli su tali termini. Con queste ipotesi, frequenti nella pratica, si può ritenere che:

$k = 2$  corrisponda a un livello di fiducia di circa il 95%

$k = 3$  corrisponda a un livello di fiducia di circa il 99%

### Dichiarazione dell'incertezza

Si consideri infine il modo formale di dichiarare l'incertezza.

Supponiamo di avere, per esempio, una massa per la quale si abbia un valore di 100,021 47 g e ipotizziamo una deviazione standard di 0,35 mg.

Potremo scrivere il risultato della sua misurazione in uno dei modi seguenti:

- Utilizzando l'incertezza composta  $u_c(y)$ , scriveremo:  
 $m = 100,021\ 47\ (0,000\ 35)\ \text{g}$ .
- Utilizzando l'incertezza estesa  $U$  con fattore di copertura  $k = 2$ , scriveremo:  
 $m = (100,021\ 47 \pm 0,000\ 70)\ \text{g}$ .

## 4 – L'incertezza nelle valutazioni di conformità

Le misurazioni vengono spesso effettuate per verificare che il risultato ricada entro un intervallo di valori considerato accettabile. È questo il caso della metrologia industriale, quando sia necessario verificare la conformità a specifiche di prodotti sia nella fase di produzione che in quella di accettazione, e della metrologia legale, quando si debba verificare il rispetto di limiti imposti dalla normativa (p. es. il livello di inquinamento elettromagnetico). Se fosse possibile effettuare misure prive di incertezze le regole decisionali per l'accettazione o il rifiuto di un prodotto o per la verifica del rispetto di limiti sarebbero molto semplici: se la misura ricade entro l'intervallo considerato accettabile l'esito è positivo, mentre se cade al di fuori di tale intervallo l'esito è negativo.

L'inevitabile presenza di incertezza associata al risultato della misura introduce però una situazione di indeterminazione in alcuni casi critici. Se infatti il risultato della misurazione  $y$  si trova vicino a uno dei limiti imposti, è possibile che l'intervallo individuato dall'incertezza estesa ( $y \pm U$ ) sia contenuto in parte in zona di accettazione e in parte in zona di reiezione. Dal momento che, per la definizione stessa di incertezza, tutti i valori contenuti in questo intervallo rappresentano possibili valori *veri* della misura, non è possibile stabilire con certezza la conformità o meno del risultato.

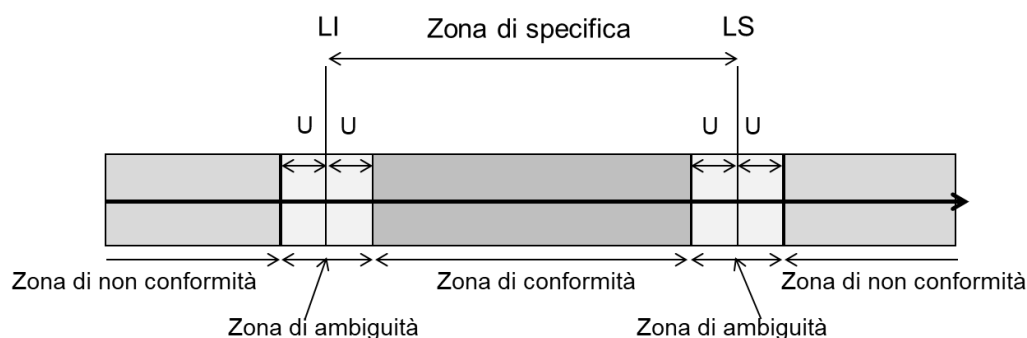
Si definiscono pertanto tre fasce di valori, illustrate in Fig. 4.1 con riferimento alla verifica di conformità dimensionale di un prodotto, che deve essere compreso nella zona di specifica, individuata tra il limite inferiore LI e il limite superiore LS:

- *zona di conformità*: è la zona di specifica ridotta dell'incertezza estesa (se la misura ricade in questa zona, l'esito del confronto è da considerarsi positivo);
- *zona di non conformità*: è la zona al di fuori delle specifiche, comprensiva dell'incertezza

estesa di misura (se la misura ricade in questa zona, l'esito del confronto è da considerarsi negativo);

- *zona di ambiguità*: è la zona attorno ai limiti delle specifiche, con ampiezza pari al doppio dell'incertezza estesa (se la misura ricade in questa zona, non è possibile stabilire con certezza la conformità o la non conformità).

Soltanto opportune indicazioni normative (come quelle previste nella ISO 14253, che riguarda le specifiche dimensionali dei prodotti) o accordi preventivi tra le parti possono definire le azioni da intraprendere quando il risultato di una misura cada all'interno della zona di ambiguità.



**Fig.4.1** – Definizione delle zone di conformità, non conformità e ambiguità.