Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - 23/02/2024

(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.
Calcolare l'integrale
i) della funzione $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}$ lungo la circonferenza di centro $2i$ e raggio unitario (**3 punti**);
ii) della funzione $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}$ lungo la circonferenza di centro 3 e raggio 2 (**3 punti**);
iii) della funzione $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}$ lungo la circonferenza con centro nel punto $2-i$ e raggio 2, usando la formula integrale di Cauchy per le derivate (**4 punti**).

Esercizio 2.
Utilizzando la trasformazione di Laplace, trovare la soluzione $y(t)$, $t \geq 0$, del problema di Cauchy (**4 punti**)

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = -3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Domanda 1.
i) Cos'è una serie di Laurent? (**2 punti**)
ii) Definire una corona circolare e fornire diversi esempi di corone circolari (**2 punti**);
iii) dimostrare il teorema dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare (**4 punti**);
iv) spiegare la classificazione delle singolarità isolate di una funzione in base all'espressione della sua serie di Laurent centrata in un punto singolare isolato (**3 punti**).

Domanda 2.
Dimostrare che l'operatore di Fourier è un operatore lineare continuo da $L^1(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$ e che la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ di una funzione $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ è continua $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$ (**5 punti**).