Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

21 febbraio 2024

Esercizio 1

Si considerino le matrici $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Posto $V = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, si consideri l'applicazione lineare $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = (1,1)$ e $f(\mathbf{v}_2) = (0,1)$.

a) Completare $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ a una base di $M_2(\mathbb{R})$
b) Calcolare $f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
c) Data $g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $g(x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2) = (x, y)$, dopo aver verificato che f e g sono linearmente indipendenti nello spazio vettoriale $L(V, \mathbb{R}^2)$, completare l'insieme $\{f, g\}$ a una base di $L(V, \mathbb{R}^2)$

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, studiare la compatibilità, al variare di $k \in \mathbb{R}$, del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = k \\ kx_2 + kx_3 - kx_4 = 0 \\ -x_1 - x_4 = 1 \end{cases}$$

e trovare l'insieme delle soluzioni per i valori di k per i quali risulti compatibile.

Esercizio 3

Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f_k(x, y, z) = (x + z, ky, k^2x + z)$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

a) Stabilire, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, se l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile
b) Posto $k = 0$, si trovi una base di ciascun autospazio di f_0