LE SOLUZIONI DELL'ESAME SCRITTO DI GEOMETRIA 1

21 FEBBRAIO 2024

ESERCIZIO 1

a) Si noti che v_1, v_2 sono lin. indipendenti.
Per completarli a una base di $M_2(\mathbb{R})$, consideriamo

$$v_1, v_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e applichiamo il metodo degli scarti successivi.

v_1, v_2 chiaramente restano, essendo linearmente indipendenti.

Chiediamoci se $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(v_1, v_2)$ cioè se $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

tali che
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

da cui $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ il che è assurdo.

Dunque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin L(v_1, v_2)$. Notiamo che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_1 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Infine chiediamoci se $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L\left(v_1, v_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ cioè

se $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \beta + \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 0 = 1 \quad \longrightarrow \text{ASSURDO} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Concludiamo che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin L\left(v_1, v_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ e

$\left\{ v_1, v_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$

(sono lin. indipendenti e $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$).

b) Il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in V$ dato che

$$v = 2v_1 - v_2$$

Allora
$$\begin{aligned} f(v) &= 2 f(v_1) - f(v_2) \\ &= 2(1,1) - (0,1) \\ &= (2,1) \end{aligned}$$

c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha f + \beta g = \mathbf{0}$ si ha:

$$\begin{aligned} (0,0) = \mathbf{0}(v_1) &= (\alpha f + \beta g)(v_1) = \alpha f(v_1) + \beta g(v_1) \\ &= \alpha(1,1) + \beta(1,0) = (\alpha + \beta, \alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Quindi f e g sono linearmente indipendenti.

Poniamo $B = \{v_1, v_2\}$ - base di V

B_c = base canonica di $\mathbb{R}^4$

Allora $$M_{BB_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Completiamo $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ a una base di $M_2(\mathbb{R})$ (vedi punto a)).

Notiamo che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$. Infatti

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Considero le uniche applicazioni lineari
$$f', g' : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
tali che $$M_{BB_c}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB_c}(g') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria generale sappiamo che l'isomorfismo

$$F : L(V, \mathbb{R}^2) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}(f)$$

è tale che

$$f = F^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = F^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f' = F^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g' = F^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché gli isomorfismi mandano basi in basi, si ha che $\{f, g, f', g'\}$ è base di $L(V, \mathbb{R}^2)$.

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & k & -k \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & k & k & -k & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2.$$

Consideriamo i suoi orlati.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & k & k \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -k, \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & -k \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} k & -k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + -1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{pmatrix} =$$

$$= -2k + 2k = 0$$

Quindi $rg(A) = 3$ per $k \neq 0$ e $rg(A) = 2$ per $k = 0$.

Per $k \neq 0$, $rg(A) = 3 = rg(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni.

Per $k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & \cancel{k} \\ 0 & 0 & 0 & -\cancel{k} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante dell'orlato di $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ottenuto aggiungendo la colonna B:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi per $k=0$ $rg(A|B) = 2 = rg(A) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni.

Troviamo le soluzioni.

- $k \neq 0$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = k - s \\ kx_2 + kx_3 = ks \\ -x_1 = 1 + s \end{cases} \qquad x_4 = s$$

da cui $x_1 = -1-s$,

$$x_2 = k - s - 2x_1 = k - s + 2 + 2s$$
$$= s + 2 + k$$

$$x_3 = s - x_2 = s - s - 2 - k = -2 - k$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(-1-s,\ s+2+k,\ -2-k) : s \in \mathbb{R}\}$$

• $k=0$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -t \\ -x_1 = 1+t \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

da cui $x_1 = -1-t$

$$x_2 = -t - 2x_1 = -t + 2 + 2t = t+2$$

Allora l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(-1-t,\ 2+t,\ s,\ t) : s,t \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 3

La matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = M_{B_c B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ k^2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (k-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ k^2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (k-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - k^2\right)$$

$$= (k-\lambda)(1-\lambda-k)(1-\lambda+k)$$

A seconda dei valori assunti da k otteniamo i seguenti autovalori:

K	AUTOVALORI	MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA
$k \neq 0$, $k \neq \frac{1}{2}$	$\lambda = k$	1
	$\lambda = 1-k$	1
	$\lambda = 1+k$	1
$k = 0$	$\lambda = 0$	1
	$\lambda = 1$	2
$k = \frac{1}{2}$	$\lambda = \frac{1}{2}$	2
	$\lambda = \frac{3}{2}$	1

- Nel primo caso ($k \neq 0$, $k \neq \frac{1}{2}$) vi sono $\underset{\dim(\mathbb{R}^3)}{\underset{\shortparallel}{3}}$ autovalori reali e distinti.

Quindi in tal caso f_k è diagonalizzabile

- Nel secondo caso ($k=0$) abbiamo 2 autovalori.

Troviamo il relativo autospazio (richiesto al punto b)).

$(x,y,z) \in V(0) \Leftrightarrow f_0(x,y,z) = 0 \cdot (x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \\ \qquad\quad z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Posto $y=s$, si ha che $x=0$, $y=s$, $z=0$. Quindi

$$V(0) = \{(0, s, 0) : s \in \mathbb{R}\} = \{s(0,1,0) : s \in \mathbb{R}\}$$
$$= L(0,1,0).$$

$$(x,y,z) \in V(1) \iff f_0(x,y,z) = 1 \cdot (x,y,z) \iff$$
$$(x+z, 0, z) = (x,y,z) \iff \begin{cases} x+z = x \\ 0 = y \\ z = z \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$V(1) = \{(s,0,0) : s \in \mathbb{R}\} = L(1,0,0).$$

Ne deduciamo che $m_g(1) = \dim V(1) = 1 \neq m_a(1)$

$\Rightarrow f_0$ non è diagonalizzabile.

- Infine per $k = \frac{1}{2}$, abbiamo 2 autovalori: $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

$$m_g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \dim V\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 - rg \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$= 3 - 1 = 2 = m_a\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$m_g\left(\tfrac{3}{2}\right) = 1 = m_a\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$\Rightarrow f_{\frac{1}{2}}$ è diagonalizzabile.