LE SOLUZIONI DELL'ESAME DI GEOMETRIA 1 DEL 6 FEBBRAIO 2024

1. Pongo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

e $v'_1 = (1, -1)$, $v'_2 = (2, 0)$.

Quindi $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di V

$B' = \{v'_1, v'_2\}$ base di $\mathbb{R}^2$

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Esprimiamo $v = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di B.

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 2\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 1 & \longrightarrow \lambda_2 = 2 - 1 = 1 \\ 2\lambda_1 = 4 & \longrightarrow \lambda_1 = 2 \\ 0 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \longrightarrow \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$v = 2 v_1 + 1 \cdot v_2 - 1 \cdot v_3$

Allora $f(v) = \lambda'_1 v'_1 + \lambda'_2 v'_2$, dove

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1-2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot v'_1 + 4 \cdot v'_2 = 5(1,-1) + 4(2,0)$$
$$= (13, -5)$$

b) $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in \ker(f) \iff f(v) = \underset{0 v'_1 + 0 \cdot v'_2}{\underset{\|}{(0,0)}}$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 = -2t \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -2t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

$x_3 = t$

Allora

$$\ker(f) = \{0 \cdot v_1 - 2t\, v_2 + t\, v_3 : t \in \mathbb{R}\} = \{t(-2v_2 + v_3) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= L(-2v_2 + v_3)$$

Una base di $\ker(f)$ è

$$\{-2v_2 + v_3\} = \left\{-2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Per quanto riguarda $\mathrm{Im}(f)$, abbiamo che

$$\mathrm{Im}(f) = L(f(v_1), f(v_2), f(v_3))$$

$$= L(3v'_1 + 2v'_2, v'_1, 2v'_1)$$

$$= L(3v'_1 + 2v'_2, v'_1)$$

Una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{3v'_1 + 2v'_2, v'_1\} =$

$$= \{3(1,-1) + 2(2,0), (1,-1)\} = \{(7,-3), (1,-1)\}.$$

c) $g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 2(x+y) \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $\quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

Troviamo $M_{B'B}(g)$.

$$g(v'_1) = g(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + k \cdot v_3$$

$$g(v'_2) = g(2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & k \end{pmatrix} = 2\, v_1 + 0 \cdot v_2 + k \cdot v_3$$

$$\Rightarrow \quad M_{B'B}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{B'B'}(f \circ g) = M_{BB'}(f) \cdot M_{B'B}(g)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k & 6+2k \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si noti che 0 è un autovalore di $f \circ g$ $\Leftrightarrow$

$\operatorname{Ker}(f \circ g) \neq \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $f \circ g$ NON è iniettiva $\Leftrightarrow$

$f \circ g$ NON è biettiva $\Leftrightarrow$ $\det\left(M_{B'B'}(f \circ g)\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \det \begin{pmatrix} 2k & 6+2k \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8k \quad \Leftrightarrow \quad k = 0.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & k & \boxed{0} & k \\ 2 & 0 & k & k \\ \boxed{0} & k-1 & \boxed{2} & k+1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & k & k & 0 \\ 0 & k-1 & 2 & k+1 & k \end{pmatrix}$$

Dato che $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ si ha che $rg(A) \geq 2$.

Consideriamo gli orlati di tale minore.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 2 & 0 & k \\ 0 & k-1 & 2 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 0 & k \\ k-1 & 2 \end{pmatrix} - k\det\begin{pmatrix} 2 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2k(k-1) - 4k$$

$$= -2k(k-1+2) = -2k(k+1)$$

Dunque se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ $rg(A) = 3. (= rg(A|B).)$

Consideriamo l'altro orlato del minore $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ nei casi $k=0 \vee k=-1$.

$k=0$: $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & +1 \end{pmatrix} = 0$ (due righe uguali)

Dunque per $k=0$ $rg(A)=2$. Anche $rg(A|B)=2$

perché $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$k = -1$: $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \det\begin{pmatrix} & \\ 2 & \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow rg(A) = 2$

Invece $rg(A|B) = 3$ perché $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$= -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$

<u>Riassumendo</u>

- per $k \neq 0, -1$ $\quad rg(A) = 3 = rg(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni

- per $k = 0$ $\quad rg(A) = 2 = rg(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni

- per $k = -1$ $\quad rg(A) = 2$, $rg(A|B) = 3 \Rightarrow$ il sistema è incompatibile

Scriviamo le soluzioni nei casi in cui il sistema è compatibile.

• Per $k \neq 0$, $k \neq -1$ il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_1 + k x_2 = -kt \\ 2x_1 + k x_3 = -kt \\ (k-1) x_2 + 2x_3 = k \end{cases} \qquad x_4 = t$$

Si tratta di un sistema di Cramer che ha come soluzione

$$x_1 = \frac{1}{-2k(k+1)} \det \begin{pmatrix} -kt & k & 0 \\ -kt & 0 & k \\ k & k-1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2k(k+1)} \left(k^3 + k^2(k-1)t + 2k^2 t \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{-2k(k+1)} \det \begin{pmatrix} 2 & -kt & 0 \\ 2 & -kt & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2k(k+1)} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k \\ 2 & -kt & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k^2}{2k(k+1)} = \frac{k}{2(k+1)}$$

$$x_3 = \frac{1}{-2k(k+1)} \det \begin{pmatrix} 2 & k & -kt \\ 2 & 0 & -kt \\ 0 & k-1 & k \end{pmatrix} = \frac{-1}{2k(k+1)} \det \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & -kt \\ 0 & k-1 & k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2k^2}{2k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

L'insieme delle soluzioni è allora

$$S = \left\{ \left(\frac{k^2 + k(k-1)t + 2kt}{-2(k+1)}, \frac{k}{2(k+1)}, \frac{k}{k+1} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

• Per $k=0$ il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_3 = t \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_2 = t \\ x_4 = s \end{matrix}$$

L'insieme delle soluzioni è allora

$$S = \{(0, t, 0, s) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

3. Trovo una base di V.

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} : a=-d\right\}=\left\{\begin{pmatrix} -d & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) : b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} : b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=L\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{v_1},\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{v_2},\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{v_3}\right)$$

v_1, v_2, v_3 sono anche linearmente indipendenti perché

$$rg\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=3 \quad \text{perché } \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\neq 0.$$

Quindi $B=\{v_1, v_2, v_3\}$ è base di V.

a) Troviamo $M_{BB}(f)$.

$$f(v_1)=f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}=2v_1$$

$$f(v_2)=f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1\end{pmatrix}=1\cdot v_1+1\cdot v_2+2\cdot v_3$$

$$f(v_3)=f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0\end{pmatrix}=0\cdot v_1-1\cdot v_2+4\cdot v_2$$

Quindi $$M_{BB}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$P(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \text{ oppure } \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Vi sono due autovalori:

2, con molteplicità algebrica 2

3, con molteplicità algebrica 1

Troviamo gli autospazi.

- $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(2) \Leftrightarrow M_{BB}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_1 = t$$

Quindi $V(2) = \{ t v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 : t \in \mathbb{R} \} = L(v_1)$

$$= L \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(3) \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \qquad \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 = t \end{cases}$$

$x_3 = t$

Allora

$$V(3) = \left\{ -\frac{t}{2} v_1 - \frac{t}{2} v_2 + t v_3 : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t\left(-\frac{v_1}{2} - \frac{v_2}{2} + v_3\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(-\frac{v_1}{2} - \frac{v_2}{2} + v_3\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) $m_g(2) = \dim V(2) = 1 \neq m_a(2) \Rightarrow f$ NON

è diagonalizzabile