Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

6 febbraio 2024

Esercizio 1

Si consideri lo spazio vettoriale

$$V = L\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

e l'applicazione lineare $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la cui matrice associata rispetto alla base $B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ di V e $B' = \{(1,-1),(2,0)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Trovare $f\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
b) Trovare una base del nucleo di f
c) Sia $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$ tale che $g(x,y) = \begin{pmatrix}x+y & 2(x+y)\\ 0 & k\end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Trovare il valore $k \in \mathbb{R}$ per il quale 0 è un autovalore di $f \circ g$

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, studiare la compatibilità, al variare di $k \in \mathbb{R}$, del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + kx_2 + kx_4 = 0 \\ 2x_1 + kx_3 + kx_4 = 0 \\ (k-1)x_2 + 2x_3 + (k+1)x_4 = k \end{cases}$$

e trovare l'insieme delle soluzioni per i valori di k per i quali risulti compatibile.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale

$$V = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + d = 0\right\}$$

e l'applicazione lineare $f: V \longrightarrow V$ tale che $f\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2d-b & b-c\\ 2b+4c & 2d+b\end{pmatrix}$.

a) Si trovino gli autovalori e gli autospazi di f
b) Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di V formata da autovettori di f