

Università di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Geometria 1

19 Gennaio 2024

Esercizio 1

Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-2,2,1,2)$ dello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 .

Siano W_1 il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ x_2 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

e $W_2 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

- a) Completare l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ a una base di \mathbb{R}^4 .
- b) Stabilire se la somma $W_1 + W_2$ è diretta. In caso affermativo trovare una decomposizione unica del generico vettore di $W_1 \oplus W_2$ nella somma di un vettore di W_1 e di un vettore di W_2 ; in caso negativo trovare un vettore di $W_1 + W_2$ che ammetta due decomposizioni distinte.
- c) Stabilire se esiste una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(f) = W_1$ e $\text{Im}(f) = W_2$. In caso affermativo esibire un esempio esplicito di tale f ; in caso negativo motivare la risposta.

Esercizio 2

Utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 & = k \\ kx_2 & = 0 \\ kx_1 + kx_3 & = k \\ x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

Si considerino i vettori di $M_2(\mathbb{R})$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e lo spazio vettoriale $V = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Sia f l'endomorfismo di V tale che

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3.$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di V formata da autovettori di f .