LE SOLUZIONI DELL'ESAME SCRITTO DI GEOMETRIA 1

19 GENNAIO 2024

ESERCIZIO 1

a) v_1 e v_2 sono lin. indipendenti perché non proporzionali.
Per completare a una base di $\mathbb{R}^4$ consideriamo la lista di vettori

$$v_1,\ v_2,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

- v_1, v_2 "restano" nella lista dato che sono lin. indip.;
- controlliamo se $e_1 \in L(v_1, v_2)$. Dato che

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

perché $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, si ha che $e_1 \notin L(v_1, v_2)$

e quindi v_1, v_2, e_1 sono lin. indip.

- controlliamo se $e_2 \in L(v_1, v_2, e_1)$. Dato che

$$\det\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&2&1&2\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\neq 0$$

si ha che v_1, v_2, e_1, e_2 sono lin. indip. e costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$ (dato che $\dim \mathbb{R}^4=4$).

b) $\{v_1, v_2\}$ è base di W_2.

Cerchiamo una base di W_1, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_1+x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad rg\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}=2$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1+x_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \qquad x_3=s \qquad x_4=t$$

da cui $x_1=-x_2=-t$, $x_3=s$, $x_4=t$.

Quindi $W_1=\{(-t,t,s,t) : s,t\in\mathbb{R}\}$

$=\{(-t,t,0,t)+(0,0,s,0) : s,t\in\mathbb{R}\}$

$=\{t(-1,1,0,1)+s(0,0,1,0) : s,t\in\mathbb{R}\}$

$$= L\big(\underset{v_1'}{(-1,1,0,1)},\ \underset{v_2'}{(0,0,1,0)}\big)$$

$\{v_1', v_2'\}$ è base di W_1.

Osserviamo che v_1, v_2, v_1', v_2' sono lin. dipendenti

Infatti

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Se la somma $W_1 + W_2$ fosse diretta $\{v_1, v_2, v_1', v_2'\}$ sarebbe una base di $W_1 \oplus W_2$. Ma abbiamo appena trovato che tali vettori sono lin. dipendenti... concludiamo allora che $W_1 + W_2$ NON è diretta.

Osserviamo che $v_2' \in L(v_1, v_2, v_1')$. Infatti cerchiamo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$v_2' = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_1'$$

$$(0,0,1,0) = \alpha(1,0,1,0) + \beta(-2,2,1,2) + \gamma(-1,1,0,1)$$

$$(0,0,1,0) = (\alpha - 2\beta - \gamma,\ 2\beta + \gamma,\ \alpha + \beta,\ 2\beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \\ 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \longrightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2$$

$$\Longrightarrow \quad v'_2 = 1 \cdot v_2 - 2 \cdot v'_1$$

Allora

$$v'_2 = v'_2 + 0$$

$$= -2v'_1 + 1 \cdot v_2$$

sono due decomposizioni distinte di $v'_2 \in W_1 + W_2$.

c) Notiamo che $\{v'_1, v'_2, e_1, e_2\}$ è base di $\mathbb{R}^4$.

Infatti

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Per il teorema fondamentale delle applicazioni lineari

$\exists!\ f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

$$f(v'_1) = (0,0,0,0), \quad f(v'_2) = (0,0,0,0), \quad f(e_1) = v_1, \quad f(e_2) = v_2$$

Tale applicazione lineare soddisfa $\ker(f) = W_1$ e

$\mathrm{Im}(f) = W_2$.

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} 2x_1 = k \\ kx_2 = 0 \\ kx_1 + kx_3 = k \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 & 0 \\ k & 0 & k & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A|B) = k \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ k & k & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -k \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & k \\ k & k \end{pmatrix} =$$

$$= -k(2k - k^2)$$

$$= -k^2(2-k)$$

$\Rightarrow \quad rg(A|B) = 4 \quad$ per $k \neq 0$ e $k \neq 2$.

Quindi per $k \neq 0$ e $k \neq 2$ il sistema è incompatibile.

Per $k = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) \geq 2$ perché $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$

Consideriamo gli orlati di $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(A|B)$$

Quindi per $k=2$ il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione. Infatti il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \longrightarrow x_1 = 1 \\ 2x_2 = 0 \longrightarrow x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \longrightarrow x_3 = 1 - x_1 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $(1,0,0)$.

Per $k=0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che ci sono 2 righe nulle sia in A che in $A|B$, si ha che $rg(A) = rg(A|B) = 2$. Il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_3 = t \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = -t$$

L'insieme delle soluzioni è $S = \{(0, t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 3

Notiamo che v_1, v_2, v_3 sono lin. indipendenti e quindi formano una base di V. Infatti

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & 2\lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$$

unica sol. nulla

Sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Allora $A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(+\lambda + \lambda^2 - 6)$$

$$= 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ oppure } \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ +2. \end{cases}$$

Ci sono 3 autovalori reali e distinti $\Rightarrow f$ è diagonalizzabile

Troviamo una base di autovettori per f.

- $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(1) \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad x_3 = t$$

$$\begin{cases} x_2 = 2t \\ x_1 + 3x_2 = 2t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow x_2 = 2t \\ \longrightarrow x_1 = 2t - 6t = -4t \end{array}$$

$$\Rightarrow V(1) = \{-4t\, v_1 + 2t\, v_2 + t\, v_3 : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(-4v_1 + 2v_2 + v_3)t : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= L(-4v_1 + 2v_2 + v_3)$$

- $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ -3x_2 \\ -3x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_2 = -2s \end{cases} \qquad x_3 = s$$

$$\Leftrightarrow \quad v = 0 \cdot v_1 - \frac{2}{3} s\, v_2 + s\, v_3$$

Quindi $V(-3) = \left\{ -\frac{2}{3} s\, v_2 + s\, v_3 : s \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ s\left(-\frac{2}{3} v_2 + v_3\right) : s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(-\frac{2}{3} v_2 + v_3\right)$$

- $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in V(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 3s \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3 = s \\ x_2 = \frac{3}{2} s \end{matrix}$$

$$V(2) = \left\{ \frac{3}{2} s\, v_2 + s\, v_3 : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\left(\frac{3}{2} v_2 + v_3\right) : s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\frac{3}{2} v_2 + v_3\right)$$

Una base di V formata da autovettori è

$$\left\{ -4v_1 + 2v_2 + v_3,\ -\frac{2}{3} v_2 + v_3,\ \frac{3}{2} v_2 + v_3 \right\}$$