17/01/2024

mercoledì 17 gennaio 2024 09:15

SVOLGIMENTO SIMULAZIONE.

1) $f(x) = \ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right)$

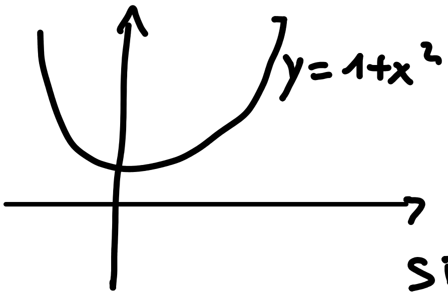
a) STUDIO DI FUNZIONE.

DOMINIO. FUNZIONE LOGARITMICA $\rightsquigarrow$ ARGOMENTO POSITIVO $\rightsquigarrow$ $-\frac{x}{1+x^2} > 0$; $\boxed{\frac{x}{1+x^2} < 0}$

N: $x > 0$ $\longrightarrow$ OK

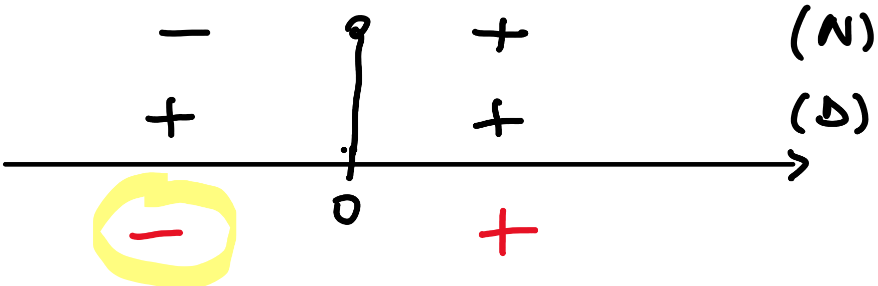
D: $1+x^2 > 0$ $\longrightarrow$ PARABOLA CON CONCAVITÁ VERSO L'ALTO E INTERSEZIONI

$x = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2}$ $\longrightarrow$ NESSUNA INTERSEZIONE



$\Rightarrow 1+x^2 > 0$ SEMPRE $(\forall x \in \mathbb{R})$

STUDIAMO IL SEGNO DEL RAPPORTO...



$\Rightarrow D = \{x < 0\} = (-\infty, 0)$

INTERSEZ. CON GLI ASSI.

- ASSE y $\rightsquigarrow$ NON CE NE POSSONO ESSERE GIACCHÈ $x=0$ NON APPARTENE

AL DOMINIO

- ASSE x $\rightsquigarrow$ PONIAMO $y=0$ $\Longrightarrow$ $0=\ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right)$

OSSIA $\ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right)=0$ $(=\ln 1)$

$$e^0=-\frac{x}{1+x^2} \qquad \text{OSSIA} \qquad 1+\frac{x}{1+x^2}=0$$

$$\frac{1+x^2+x}{1+x^2}=0 \Longrightarrow x^2+x+1=0$$

$$\Longrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Longrightarrow$$ NESSUNA SOLUZ., QUINDI NESSUNA INTERSEZ.

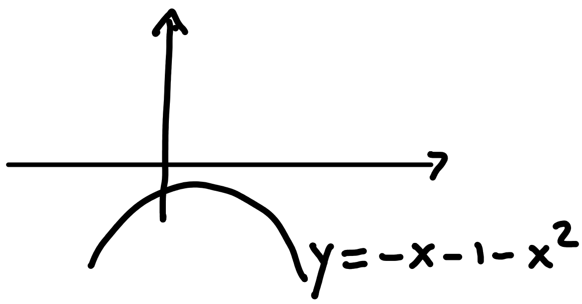
<u>SEGNO DI f.</u> $\quad y\geq 0 \Longleftrightarrow \ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right)\geq 0$

$$\ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right)\geq \ln(1) \overset{(e>1)}{\Longrightarrow} -\frac{x}{1+x^2}\geq 1$$

$$-\frac{x}{1+x^2}-1\geq 0 \;; \quad \frac{-x-1-x^2}{1+x^2}\geq 0$$

N: $-x-1-x^2\geq 0$ $\longrightarrow$ PARABOLA CON CONC. VERSO IL BASSO, SENZA INTERSEZ.

D: $1+x^2>0$ $\longrightarrow$ $\forall x\in D$



DI CONSEGUENZA, IL NUM. É SEMPRE NEGATIVO, MENTRE IL DENOM. É SEMPRE POSITIVO.

— (N)

$$\overset{+}{\underset{-}{\longrightarrow}} \quad (D)$$

OSSIA LA FUNZIONE É SEMPRE NEGATIVA.

LIMITI AGLI ESTREMI. $\quad D = (-\infty, 0)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right) = \ln\left(-\frac{-\infty}{+\infty}\right) \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \ln\left(-\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{-1}{x\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right) = \ln\left(\frac{-1}{-\infty}\right)$$

$$= \ln\left(+\frac{1}{\infty}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right) = \ln\left(-\frac{0^-}{1+0}\right)$$

$$= \ln(0^+) = -\infty$$

MAX-MIN RELATIVI. $\quad f(x) = \ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right) \implies$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(-\frac{x}{1+x^2}\right)} \cdot \frac{(-1)(1+x^2)-(-x)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{\cancel{1+x^2}}{x} \cdot \frac{-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-(-1+x^2)}{} \qquad = \quad 1-x^2$$

$$= \frac{-(-1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$$

PUNTI STAZIONARI? $\quad f'(x) = 0 \iff \dfrac{1-x^2}{x(1+x^2)} = 0$

$\iff 1-x^2 = 0 \iff (1-x)(1+x) = 0$ OSSIA

I PUNTI $\quad x = +1 \rightsquigarrow$ NON ACCETTABILE $(1 \notin D)$

$\qquad\qquad x = -1 \longrightarrow$ OK

STUDIAMO IL SEGNO DI $f'(x)$:

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} \geq 0$$

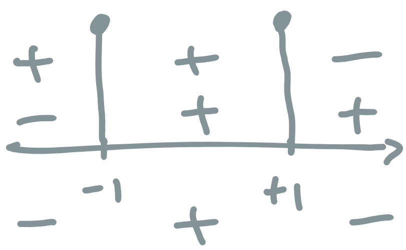
N: $1-x^2 \geq 0 \xrightarrow[\text{GRAFICO}]{\text{METODO}} -1 \leq x \leq 1$

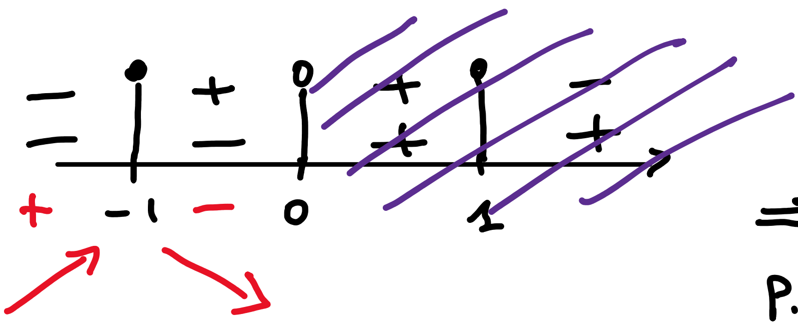
D: $x(1+x^2) \geq 0 \xrightarrow[(1+x^2>0 \text{ SEMPRE})]{} x \geq 0$

N: $1-x^2 \geq 0$; $\quad (1-x)(1+x) \geq 0$

F_1: $1-x \geq 0 \longrightarrow x \leq 1$

F_2: $1+x \geq 0 \longrightarrow x \geq -1$





← (PUNTI ESCLUSI DAL DOMINIO)

$\Longrightarrow x = -1$ È P.TO DI MAX REL.

DERIVATA 2ª E FLESSI. $\quad f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\ldots} = \dfrac{1-x^2}{\ldots}$

DERIVATA 2ª E FLESSI.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1-x^2}{x+x^3}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x+x^3)-(1-x^2)(1+3x^2)}{(x+x^3)^2} = \frac{-2x^2-2x^4-(1+3x^2-x^2-3x^4)}{[x(1+x^2)]^2}$$

$$= \frac{x^4-4x^2-1}{x^2(1+x^2)^2}$$

SEGNO DI $f''(x)$: $\quad f''(x) \geq 0 \iff$

$$\frac{x^4-4x^2-1}{x^2(1+x^2)^2} \geq 0$$

N: $x^4-4x^2-1 \geq 0 \rightarrow (\star)$

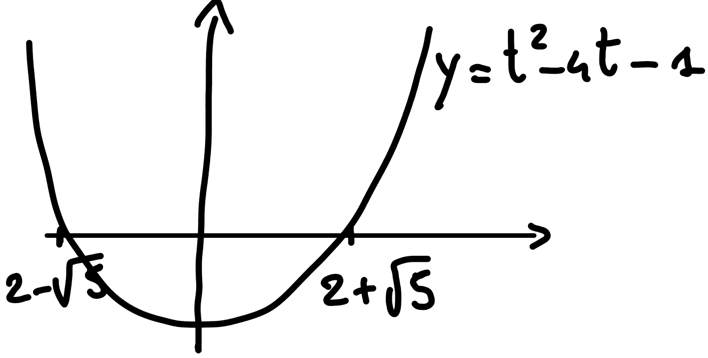
D: $x^2(1+x^2)^2 > 0 \rightarrow \forall x \in D$

$(\star)$ SOSTITUZIONE $x^2 = t \rightarrow t^2-4t-1 \geq 0$

$\rightsquigarrow$ PARABOLA CON CONCAVITA' VERSO L'ALTO E INTERS

$$t = \frac{+4 \pm \sqrt{16-4\cdot(-1)\cdot(+1)}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4\cdot 5}}{2} =$$

$$= \frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{\cancel{2}(2\pm\sqrt{5})}{\cancel{2}} = 2\pm\sqrt{5}$$



$\Rightarrow$ LE SOLUZIONI DI $t^2-4t-1 \geq 0$ SONO

$$t \leq 2-\sqrt{5} \quad \vee \quad t \geq 2+\sqrt{5}$$

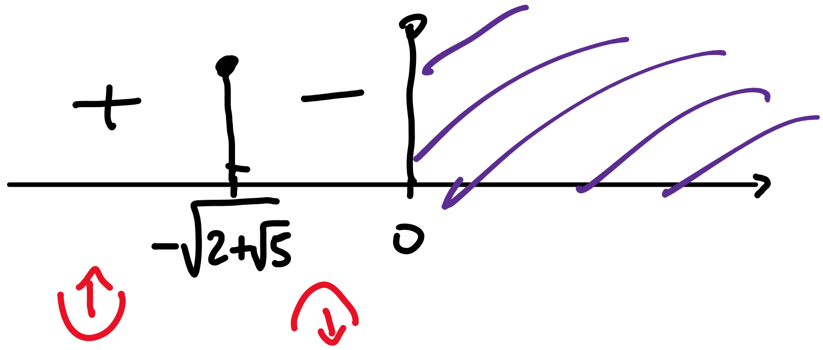
FACCIAMO LA SOSTITUZIONE $t \mapsto x^2$ OTTENENDO

LE 2 SOLUZIONI $\underbrace{x^2 \leq 2-\sqrt{5}}_{\text{IMPOSSIBILE}} \quad \vee \quad x^2 \geq 2+\sqrt{5}$

(QUADRATO NON PUÓ ESSERE MINORE DI UN NUMERO NEGATIVO)

RIMANE $x^2 \geq 2+\sqrt{5} \implies x \geq +\sqrt{2+\sqrt{5}} \quad \vee$
$x \leq -\sqrt{2+\sqrt{5}}$

MA SOLO $x \leq -\sqrt{2+\sqrt{5}}$ É ACCETTABILE IN QUANTO $D=(-\infty,0)$. RIASSUMENDO, IL SEGNO DI $f''(x)$ É



DI CONSEGUENZA $x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}$ É P.TO DI FLESSO.

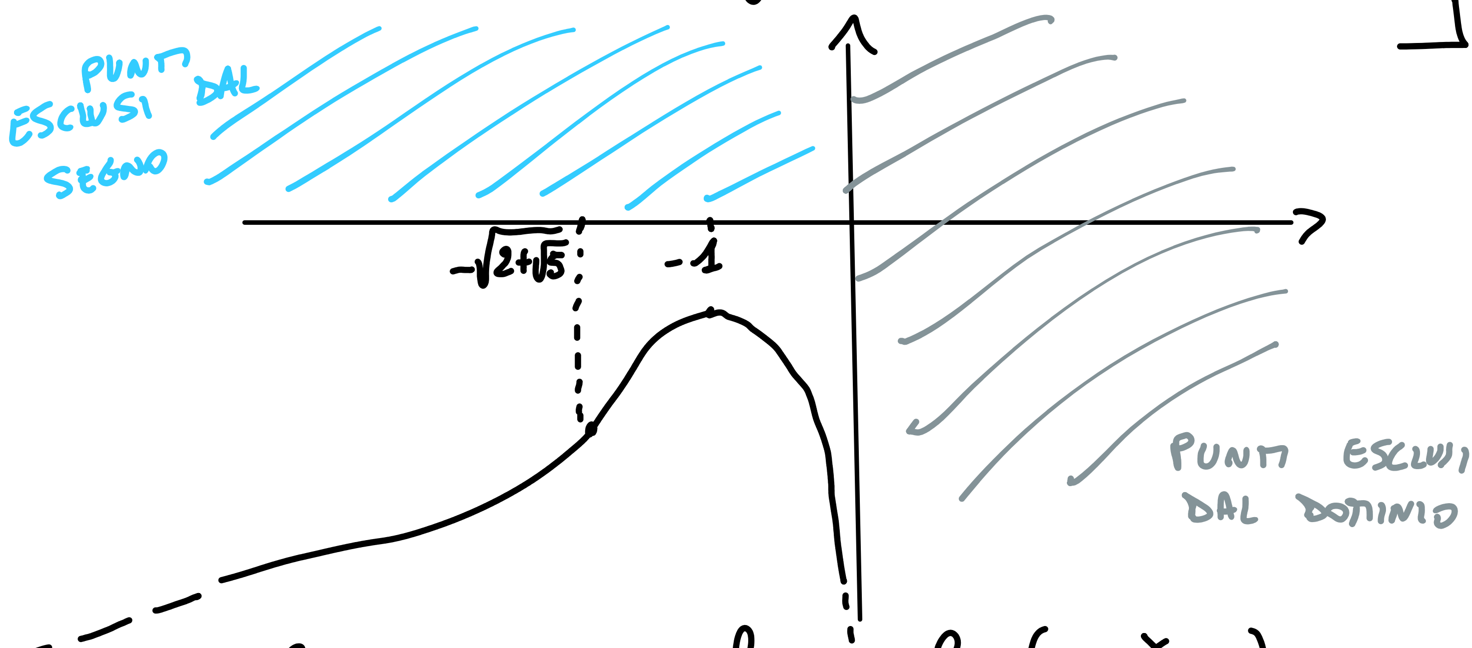


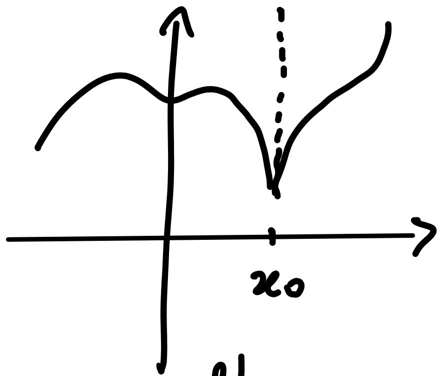
GRAFICO DI $f(x) = \ln\left(-\frac{x}{1+x^2}\right)$

b) $f'(-2) = \frac{1-(-2)^2}{\quad} = \frac{1-4}{\quad} = -3$

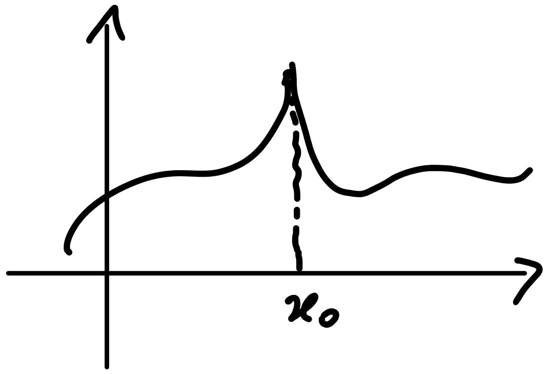
b) $$f'(-2) = \frac{1-(-2)^2}{(-2)(1+(-2)^2)} = \frac{1-4}{-2(1+4)} = \frac{-3}{-2\cdot 5} =$$
$$= \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}$$

c) UNA <u>CUSPIDE</u> É UN P.TO x_0 DI NON DERIVABILITÁ DOVE UNO TRA $f'_+(x_0)$ ED $f'_-(x_0)$ VALE $+\infty$, L'ALTRO VALE $-\infty$.

[LEZ. 2023.11.30.b]



CASO $f'_-(x_0) = -\infty$
$f'_+(x_0) = +\infty$



CASO $f'_-(x_0) = +\infty$
$f'_+(x_0) = -\infty$

---

2) $f(x) = x^2 \ln x$

a) $$\int \underbrace{x^2}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g} \, dx \xrightarrow[\text{PER PARTI}]{\text{INTEGRO}}$$ $\left[\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx \right]$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{\cancel{x^3}^{\,x^2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + c$$

[PROVA: $D\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c\right] =$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3}x^2\cdot \ln x + \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} - \frac{1}{\cancel{9}_3}\cdot \cancel{3}x^2 + 0$$

$$= x^2\cdot \ln x + \cancel{\frac{x^2}{3}} - \cancel{\frac{x^2}{3}} = x^2\cdot \ln x \qquad \checkmark$$
]

b) $$\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^3}{3}\cdot \overbrace{\ln e}^{1} - \frac{e^3}{9}\right) - \left(\frac{1^3}{3}\underbrace{\ln 1}_{0} - \frac{1^3}{9}\right)$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3e^3 - e^3 + 1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$$

c) NO, PERCHÉ $[1, e)$ NON É UN INTERVALLO CHIUSO.

[LEZ. 2023.12.20]

—— // ——

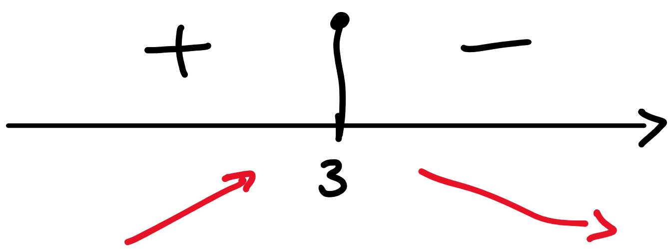
3) $N(\mu) = 300\mu(6-\mu)$

<u>MAX – MIN RELATIVI</u> :

$$N'(\mu) = 300 \cdot (6-\mu) + 300\mu(-1)$$
$$= 1800 - 300\mu - 300\mu$$
$$= 1800 - 600\mu$$

$$N'(\mu) \geq 0 \iff 1800 - 600\mu \geq 0$$
$$-600\mu \geq -1800$$
$$\mu \leq \frac{-1800}{-600}$$

OSSIA $\mu \leq +3$



DI CONSEGUENZA,

$\mu = +3$ É MAX RELATIVO.

---

4)

X	DIAMETRO (cm)	54	29	14	42	37	1
Y	ETÀ (anni)	97	97	22	53	114	13

a) <u>MEDIA</u> : $\bar{y} = \frac{\sum_i y_i}{n} = \frac{97+97+22+53+114+13}{6}$

$= 66$

ATTENZIONE!!! AL COMPITO NON VA BENE SCRIVERE DIRETTAMENTE $\bar{y} = 66$.

MEDIANA: RIORDINIAMO I VALORI IN SENSO CRESCENTE

13 , 22 , 53 , 97 , 97 , 114

LA MEDIANA É LA MEDIA TRA 53 E 97, OSSIA $\frac{53+97}{2} = 75$.

VARIANZA: $\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n} =$

$$= \frac{(97-66)^2 + (97-66)^2 + (22-66)^2 + (53-66)^2 + (114-66)^2 + (13-66)^2}{6}$$

$$= \frac{(31)^2 + (31)^2 + (-44)^2 + (-13)^2 + (48)^2 + (-53)^2}{6} = 1523.33$$

b) $\rho_{xy} = ?$ $\qquad Y = aX + b$?

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2} \cdot \sqrt{\sigma_y^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$$

INIZIAMO CALCOLANDO $\bar{x}$ (DIAMETRO MEDIO) E σ_x^2 :

$$\bar{X} = \frac{54 + 29 + 14 + 42 + 37 + 1}{6} = 29.5$$

$$\overline{X} = \frac{54+29+14+42+37+1}{6} = 29.5$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(54-29.5)^2+(29-29.5)^2+(14-29.5)^2+(42-29.5)^2+(37-29.5)^2+(1-29.5)^2}{6}$$

$$= \frac{(24.5)^2+(-0.5)^2+(-15.5)^2+(12.5)^2+(7.5)^2+(-28.5)^2}{6} = 310.92$$

LA CORRELAZIONE σ_{xy} É INVECE

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{6}$$

$$= \frac{(24.5)(31)+(-0.5)(31)+(-15.5)(-44)+(12.5)(-13)+(7.5)(48)+(-28.5)(-53)}{6}$$

$$= \frac{3134}{6} = 522.33$$

$$\Rightarrow \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{522.33}{\sqrt{310.92}\cdot\sqrt{1523.33}} = 0.76$$

OSSIA "REGRESSIONE FORTE"

LA RETTA DI REGRESSIONE LINEARE HA EQ. $Y = aX + b$ DOVE

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}, \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

[LEZ. 2024.01.12.b]

$$\Rightarrow \quad a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{522.33}{310.92} = 1.68$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 66 - 1.68 \cdot 29.5 = 16.44$$

$$\Rightarrow \quad Y = 1.68\,X + 16.44$$

L'APPROSSIMAZIONE RICHIESTA SI CALCOLA SOSTITUENDO $X = 10$ (cm) E OTTENENDO

$$Y = 1.68 \cdot (10) + 16.44 = 16.8 + 16.44 = 33.24$$

(anni)

[ALTERNATIVO]

		Visite mediche (X_1)	Nessuna visita (X_2)	**Totale**
Y_1	Non sportivi	15	45	**60**
Y_2	Sportivi dilettanti	10	15	**25**
Y_3	Sportivi professionisti	65	50	**115**
	Totale	**90**	**110**	200

TEST χ^2 DI INDIPENDENZA:

H_0 = "X, Y SONO INDIPENDENTI".

SCRIVIAMO LA TABELLA DEI VALORI ATTESI:

	X_1	X_2	
Y_1	$\frac{60 \cdot 90}{200} = 18$	$\frac{60 \cdot 110}{200} = 33$	60
Y_2	$\frac{90 \cdot 25}{200} = 11.25$	$\frac{110 \cdot 25}{200} = 13.75$	25
Y_3	51.75	63.25	115
	90	110	200

NOTIAMO CHE CIASCUNA FREQ. ATTESA É MAGGIORE DI 5 $\Rightarrow$ SONO SODDISFATTE LE IPOTESI DEL TEST χ^2 $\Rightarrow$ LA Q.TA' PIVOTALE É

$$\chi^{2\,*}_{((2-1)(3-1))} = \sum_i \sum_j \frac{\left(F^{OTT.}_{ij} - F^{ATT.}_{ij}\right)^2}{F^{ATT.}_{ij}} =$$

$$= \frac{(15-18)^2}{18} + \frac{(45-33)^2}{33} + \frac{(10-11.25)^2}{11.25} +$$

$$+ \frac{(15-13.75)^2}{13.75} + \frac{(65-51.75)^2}{51.75} + \frac{(50-63.25)^2}{63.25} =$$

$$= \frac{3^2}{18} + \frac{12^2}{33} + \frac{(1.25)^2}{11.25} + \frac{(1.25)^2}{13.75} + \frac{(13.25)^2}{51.75} + \frac{(13.25)^2}{63.25} =$$

$$= 11.28$$

OSSIA $\chi^{2\,*}_{2} = 11.28$

CONFRONTANDO IL RISULTATO DEL TEST CON I VALORI IN TABELLA, ABBIAMO CHE

n \ α	0.1	0.05	0.01
2	4.605	5.991	9.210
	✗	✗	✗

PER $\alpha = 0.01$ $\rightsquigarrow$ $9.210 < 11.28$ OSSIA RIFIUTIAMO IL TEST (CON PRECISIONE DEL 99 %).