16/01/2024

lunedì 15 gennaio 2024 16:35

UN TEST D'IPOTESI É UN METODO CHE SERVE A VERIFICARE (O NEGARE) UN'IPOTESI STATISTICA.

PER USARE UN TEST, DATO CHE NE ESISTONO MOLTEPLICI, OCCORRE:

a) SCEGLIERE L'IPOTESI H_0 DA VERIFICARE
b) SCEGLIERE IL TEST CHE SI VUOLE EFFETTUARE
c) VERIFICARE CHE LE IPOTESI DEL TEST SIANO VERIFICATE
d) SCEGLIERE IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITÁ $\alpha \in \{0.1, 0.05, 0.01\}$
e) CALCOLARE UNA <u>Q.TA' PIVOTALE</u> Q^* (DIVERSA PER OGNI TEST) E $p = P(\text{TEST} < Q^*)$ (CHIAMATO p-VALUE)
f) CONFRONTIAMO p CON α:
   - SE $p \geq \alpha \Rightarrow$ ACCETTO H_0
   - SE $p < \alpha \Rightarrow$ RIFIUTO H_0 (E QUINDI ACCETTO H_1).

UN TIPO DI TEST FREQUENTE É QUELLO DEI COSIDDETTI "TEST DI ADATTAMENTO".

TEST Z:

- SI APPLICA PER TESTARE H_0 = "IL CAMPIONE É COERENTE CON UN FENOMENO $N(\mu, \sigma^2)$" CON μ, σ^2 NOTI
- OCCORRE CONOSCERE A PRIORI μ, σ^2; INOLTRE DEVE ESSERE n "GRANDE" $(n \cdot \mu > 5, \quad n(1-\mu) > 5)$
- LA Q.TA' PIVOTALE DA CALCOLARE É

$$Z^* = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$$

ESEMPIO: LANCIO UNA MONETA 30 VOLTE, OTTENENDO 25 VOLTE TESTA.

IPOTIZZO CHE H_0 = "MONETA NON TRUCCATA"

TALE IPOTESI CORRISPONDE A DIRE CHE LA MONETA HA $\mu = \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{1}{2}$ (DISTRIB. BINOMIALE CON $p = \frac{1}{2}$). NOTIAMO CHE

$$\left\{ n \cdot \mu = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 > 5 \right.$$

$$\begin{cases} n \cdot \mu = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 > 5 \\ n(1-\mu) = 30\left(1-\frac{1}{2}\right) = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 > 5 \end{cases}$$

POSSIAMO DUNQUE APPLICARE IL TEST Z.
CALCOLIAMO LA Q.TA' PIVOTALE

$$Z^* = \frac{\tilde{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{\frac{25}{30} - \frac{1}{2}}{1/2} \cdot \sqrt{30} = 3.65$$

PER CONFRONTARE IL NOSTRO TEST CON I LIVELLI DI SIGNIFICATIVITÁ, USEREMO TABELLE NUMERICHE CON CALCOLI FATTI AL COMPUTER:

- SE IL VALORE IN TABELLA IN CORRISPONDENZA DI α SCELTO É MAGGIORE DEL VALORE DEL TEST (NEL NOSTRO ES. 3.65) $\Rightarrow$ ACCETTO H_0.

Tabella 8.1
Valori di soglia per il test Z (a due code)

α	k^*
0.1	1.645
0.05	1.960
0.01	2.576

- SE IL VALORE IN TABELLA É MINORE DEL VALORE DEL TEST $\Rightarrow$ RIFIUTO H_0.

NEL NOSTRO ESEMPIO:

- PER $\alpha = 0.1 \Rightarrow 1.645 < 3.65$
  QUINDI RIFIUTO L'IPOTESI H_0 = "MONETA NON TRUCCATA" AL 90%.

- PER $\alpha = 0.05 \Rightarrow 1.960 < 3.65$

QUINDI RIFIUTO H_0 ANCHE AL 95%

- PER $\alpha = 0.01 \Rightarrow 2.576 < 3.65$

  QUINDI RIFIUTO H_0 ANCHE AL 99%

ESERCIZIO: TESTARE L'IPOTESI DI MONETA EQUILIBRATA NEI CASI

a) 18 VOLTE TESTA

b) 20 VOLTE TESTA

CONSIDERANDO SEMPRE $\mu = \sigma = \frac{1}{2}$ COME SOPRA.

TEST T DI STUDENT:

- SI APPLICA PER TESTARE H_0 = "IL CAMPIONE É COERENTE CON UN FENOMENO $N(\mu, \sigma^2)$", CON SOLO μ NOTA.
- OCCORRE CONOSCERE A PRIORI μ (MENTRE σ^2 VIENE STIMATO CON LA VARIANZA CAMPIONARIA s^2); INOLTRE LA POPOLAZIONE DEVE AVERE DISTRIBUZIONE NORMALE OPPURE $n > 120$.
- LA Q.TA' PIVOTALE DA CALCOLARE É

$$|T^*_{n-1}| = \frac{|\bar{x} - \mu|}{s} \cdot \sqrt{n}$$

- GRADI DI LIBERTA': $\nu = n - 1$.

• GRADI DI LIBERTÁ : $\nu = n - 1$.

ESEMPIO: SUPPONIAMO DI ESTRARRE UN CAMPIONE DI 6 UNITÁ DA UNA POPOLAZIONE CON DISTRIBUZIONE $N(12.5, \sigma^2)$ $(\mu = 12.5)$

ESSO É:

11.5 , 11 , 12.5 , 13.1 , 12.7 , 12.4

É COERENTE CON L'IPOTESI H_0 = "LA DISTRIB. DELLA POPOLAZIONE É EFF. $N(12.5, \sigma^2)$?"

$$|T^*_{6-1}| = \frac{|\bar{X} - 12.5|}{S} \cdot \sqrt{6}$$

$$\bar{X} = \frac{11.5 + 11 + 12.5 + 13.1 + 12.7 + 12.4}{6} = 12.2$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} =$$

$$= \frac{(11.5 - 12.2)^2 + (11 - 12.2)^2 + (12.5 - 12.2)^2 + (13.1 - 12.2)^2 + (12.7 - 12.2)^2 + (12.4 - 12.2)^2}{6-1}$$

$$= \frac{(-0.7)^2 + (-1.2)^2 + (0.3)^2 + (0.9)^2 + (0.5)^2 + (0.2)^2}{5} = 0.624$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{S^2} = \sqrt{0.624} = 0.79$$

$$|T_5^*| = \frac{|\bar{X} - \mu|}{S} \cdot \sqrt{n} = \frac{|12.2 - 12.5|}{0.79} \cdot \sqrt{6} = 0.93$$

Tabella 8.2
Valori di soglia per il test T
(a due code)

Gradi di libertà, ν \ Livello di affidabilità, α	0.1	0.05	0.01
1	6.314	12.706	63.657
2	2.920	4.303	9.925
3	2.353	3.182	5.841
4	2.132	2.776	4.604
5	2.015	2.571	4.032
6	1.943	2.447	3.707
7	1.895	2.365	3.499
8	1.860	2.306	3.335
9	1.833	2.262	3.250
10	1.812	2.764	3.169
15	1.753	2.131	2.947
20	1.725	2.086	2.845
25	1.708	2.060	2.787
30	1.697	2.042	2.750
40	1.684	2.021	2.704
50	1.676	2.009	2.678
100	1.660	1.984	2.626

CONFRONTANDO IL RISULTATO OTTENUTO CON QUELLI IN TABELLA (RIGA IN CORRISP. DEI GRADI DI LIBERTA' = 5) SI HA:

n \ α	0.1	0.05	0.01
5	2.015	2.571	4.032
	✓	✓	✓

- $\alpha = 0.01 \rightsquigarrow 4.032 > 0.93$ QUINDI ACCETTO H_0 CON LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA' 0.01

- $\alpha = 0.05 \rightsquigarrow 2.571 > 0.93 \Rightarrow$ ACCETTO H_0
- $\alpha = 0.1 \rightsquigarrow 2.015 > 0.93 \Rightarrow$ ACCETTO H_0

TEST χ^2:

- SI APPLICA PER TESTARE H_0 = "n ESPERIMENTI SONO COERENTI CON LA PROBABILITA' ATTESA P_i DI CIASCUN EVENTO i-ESIMO"
- OCCORRE CHE GLI n ESPERIMENTI SIANO INDIPENDENTI TRA LORO E CHE $n \cdot p_i > 5$

INDIPENDENTI TRA LORO E CHE $n \cdot p_i > 5$ $\forall i = 1, \dots, k$ DOVE k É IL NUMERO DI RISULTATI POSSIBILI

- LA Q.TA' PIVOTALE DA CALCOLARE É

$$\chi^2_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(F_i^{OTTENUTE} - F_i^{ATTESE}\right)^2}{F_i^{ATTESE}}$$

DOVE F_i^{OTT} = FREQ. ASSOLUTA OTTENUTA DEL RISULTATO i

F_i^{ATT} = FREQ. ASSOLUTA ATTESA DEL RISULTATO i

ESEMPIO: LANCIO 2 DADI $n = 720$ VOLTE. VOGLIO CAPIRE SE H_0 = "I RISULTATI OTTENUTI SONO COERENTI COL FATTO CHE I DADI NON SIANO TRUCCATI" É VERA.

"DADI NON TRUCCATI" SIGNIFICA CHE

$P(2) = \frac{1}{36}$, $P(3) = \frac{2}{36}$, $P(3) = \frac{3}{36}$,

... , $P(10) = \frac{3}{36}$, $P(11) = \frac{2}{36}$, $P(12) = \frac{1}{36}$

ABBIAMO OTTENUTO I SEGUENTI RISULTATI:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
FREQ. ASSOL. OTTENUTE	5	11	60	100	110	160	108	95	55	9	7

QUANTO VALGONO LE $F_i^{ATT.}$?

$$F_i^{ATT.} = n \cdot p_i$$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
FREQ. ASSOL. ATTESE	20	40	60	80	100	120	100	80	60	40	20

‖

$$\frac{1}{36} \cdot 720$$

$$\chi^2_{k-1} = \chi^2_{11-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(F_i^{OTT} - F_i^{ATT}\right)^2}{F_i^{ATT}} =$$

$$= \frac{(5-20)^2}{20} + \frac{(11-40)^2}{40} + \frac{(60-60)^2}{60} + \frac{(100-80)^2}{80} +$$

$$+ \frac{(110-100)^2}{100} + \frac{(160-120)^2}{120} + \frac{(108-100)^2}{100} + \frac{(95-80)^2}{80} +$$

$$+ \frac{(55-60)^2}{60} + \frac{(9-40)^2}{40} + \frac{(7-20)^2}{20}$$

$$= \frac{15^2}{20} + \frac{29^2}{40} + 0 + \frac{20^2}{80} + \frac{10^2}{100} + \frac{40^2}{120} + \frac{12^2}{100} + \frac{15^2}{80} +$$

$$+ \frac{5^2}{60} + \frac{31^2}{40} + \frac{13^2}{20} = 88.75$$

Tabella 8.6
Valori di soglia per il test χ^2

Gradi di libertà, ν	Livello di affidabilità, α 0.1	0.05	0.01
1	2.706	3.841	6.635
2	4.605	5.991	9.210
3	6.251	7.815	11.345
4	7.779	9.488	13.277
5	9.236	11.070	15.086
6	10.645	12.592	16.812
7	12.017	14.067	18.475
8	13.362	15.507	20.090
9	14.864	16.919	21.666
10	15.987	18.307	23.209
15	22.307	26.996	30.578
20	28.412	31.410	37.566
25	34.382	37.652	44.314
30	40.256	43.773	50.892
40	51.805	55.758	63.691
50	63.167	67.505	76.154

CONFRONTANDO IL RISULTATO DEL TEST CON I VALORI DEL χ^2 CON $11-1=10$ GRADI DI LIBERTÁ ABBIAMO ...

$n \backslash \alpha$	0.1	0.05	0.01
10	15.987	18.307	23.209

- $\alpha = 0.01 \rightsquigarrow 23.209 < 88.75 \Rightarrow$ RIFIUTIAMO $H_0 =$ "IL CAMPIONE É COERENTE CON DADI EQUILIBRATI" AL 99 %

ESEMPIO: UN NEGOZIO VENDE SOLO 3 TIPI DI SCARPE: STIVALETTI, SCARPE COL TACCO E SCARPE DA TENNIS. IPOTIZZIAMO CHE, CONOSCENDO LE ULTIME MODE, VI SIANO:

- 20% DI STIVALETTI;
- 45% DI SCARPE COL TACCO;
- 35% DI SCARPE DA TENNIS;

GIRANDO TRA GLI SCAFFALI, CONTIAMO 300 PAIA DI SCARPE COSÍ DIVISE:

	STIVALETTI	SCARPE COL TACCO	SCARPE DA TENNIS
FREQ. ASSOL. OTTENUTE	50	125	125
FREQ. ASSOL. ATTESE	60	135	105

$= n \cdot p_i = 300 \cdot 0.2$ $\qquad = 300 \cdot 0.45$ $\qquad = 300 \cdot 0.35$

$$\Rightarrow \chi^2_{3-1} = \frac{(50-60)^2}{60} + \frac{(125-135)^2}{135} + \frac{(125-105)^2}{105}$$

$$= \frac{100}{60} + \frac{100}{135} + \frac{400}{105} = 6.217$$

CONFRONTANDO IL RISULTATO DEL TEST OTTENGO:

$n \backslash \alpha$	0.1	0.05	0.01
2	4.605	5.991	9.210
	✗	✗	✓

- $\alpha = 0.01 \rightsquigarrow 9.210 > 6.217 \Rightarrow$ ACCETTO H_0
- $\alpha = 0.05 \rightsquigarrow 5.991 < 6.217 \Rightarrow$ RIFIUTO H_0

(DI CONSEGUENZA RIFIUTO H_0 PER $\alpha > 0.05$, AD ESEMPIO
$\alpha = 0.1 \rightsquigarrow 4.605 < 6.217$)

QUINDI, RIASSUMENDO:

- POSSO DIRE CON PRECISIONE DEL 95% CHE H_0 É FALSA, OSSIA CHE LE PAIA VISTE NON SONO COERENTI CON LE PERCENTUALI DI 20% - 45% - 35% SCRITTE SOPRA.
- POSSO ANCHE DIRE CHE NON É NEGABILE H_0 AL 99% (NON POSSO DIRE "QUELLE PERCENTUALI SONO INESATTE AL 99%").

UN TIPO PARTICOLARE DI TEST DI ADATTAMENTO É IL <u>TEST χ^2 DI INDIPENDENZA</u>; SUPPONIAMO DI AVERE 2 VARIABILI X, Y CON k, h MODALITA' RISPETTIVAMENTE.

$$H_0 = \text{"}X, Y \text{ SONO INDIPENDENTI"}.$$

RICORDIAMO CHE X, Y SONO INDIPENDENTI $\overset{def.}{\iff}$ $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$. QUINDI CERCHIAMO DI CAPIRE SE n_{ij} = FREQ. OTTENUTA DI X_j, Y_i CORRISPONDE AL PRODOTTO $n_j \cdot n_i$, DOVE $n_j = n \cdot p_j^X$ CON $p_j^X = P(X_j)$, $p_i^Y = P(Y_i)$.

LA Q.TA' PIVOTALE SARÁ ANCORA $\chi^2((k-1)(h-1))$:

$$\chi^2_{((k-1)(h-1))} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} \frac{\left(F^{OTT}_{ij} - F^{ATT.}_{ij}\right)^2}{F^{ATT.}_{ij}}$$

ESEMPIO: TESTIAMO 330 VOLTE UN FARMACO:

	NESSUNA DOSE X_1	UNA DOSE X_2	DUE DOSI X_3	
GUARITO Y_1	12	5	29	$46 = F^Y_1$
MALATO Y_2	114	80	90	$284 = F^Y_2$
	$126 = F^X_1$	$85 = F^X_2$	$119 = F^X_3$	

H_0 = "X, Y SONO INDIPENDENTI", OSSIA TRATTAMENTO (X) E RISULTATI (Y) SONO INDIPENDENTI?

SCRIVIAMO LA TABELLA DEI VALORI ATTESI:

	NESSUNA DOSE X_1	UNA DOSE X_2	DUE DOSI X_3
GUARITO Y_1	$\frac{126 \cdot 46}{330} = 17.56$	$\frac{85 \cdot 46}{330} = 11.85$	$\frac{119 \cdot 46}{330} = 16.59$
MALATO Y_2	$\frac{126 \cdot 284}{330} = 108.44$	73.15	102.41

$$\Rightarrow \chi^2_{((3-1)(2-1))} = \frac{(12-17.56)^2}{17.56} + \frac{(5-11.85)^2}{11.85} + \frac{(29-16.59)^2}{16.59} +$$

$$+ \frac{(114-108.44)^2}{108.44} + \frac{(80-73.15)^2}{73.15} + \frac{(90-102.41)^2}{102.41}$$

$= 17.4$

QUINDI $\chi^2_2 = 17.4$.

$n \backslash \alpha$	0.1	0.05	0.01
2	4.605	5.991	9.210
	×	×	×

CONFRONTANDO IL RISULTATO 17.4 CON LA TABELLA ABBIAMO CHE PER $\alpha = 0.01$ SI HA $9.210 < 17.4 \Rightarrow$ RIFIUTIAMO H_0 AL 99%, OSSIA TRATTAMENTO E RISULTATO SONO DIPENDENTI TRA LORO AL 99%.

ESEMPIO: STUDI EFFETTUATI DOPO L'ESPLOSIONE DEL 1976 A SEVESO HANNO SUGGERITO CHE UN'ESPOSIZIONE A Q.TÁ ELEVATE DI DIOSSINA (PIÚ DI 15 PARTI PER MILIARDO) POSSA AUMENTARE LA PERCENTUALE DI NASCITE FEMMINILI RISPETTO ALLE MASCHILI, E CI SI É POSTI IL PROBLEMA DI CAPIRE SE CIÓ FOSSE LEGATO AL SESSO DEL GENITORE ESPOSTO. SI É OTTENUTO IL RISULTATO:

	FIGLIE FEMMINE X_1	FIGLI MASCHI X_2	
PADRE ESPOSTO, MADRE NO Y_1	105	81	186
MADRE ESPOSTA, PADRE NO Y_2	100	120	220
	205	201	406

SE X = "GENERE DEI FIGLI" FOSSE INDIPENDENTE DA Y = "GENITORE ESPOSTO", DOVREMMO AVERE I SEGUENTI VALORI ATTESI:

	FIGLIE FEMMINE X_1	FIGLI MASCHI X_2	
PADRE ESPOSTO, MADRE NO Y_1	$\frac{205 \cdot 186}{406} = 93.92$	92.08	186
MADRE ESPOSTA, PADRE NO Y_2	111.08	108.92	220
	205	201	406

$$\Rightarrow \chi^2_{((2-1)(2-1))} = \frac{(105-93.92)^2}{93.92} + \frac{(81-92.08)^2}{92.08} + \frac{(100-111.08)^2}{111.08} + \frac{(120-108.92)^2}{108.92} = 4.873$$

m \ α	0.1	0.05	0.01
1	2.706	3.841	6.635
	✗	✗	✓

CONFRONTANDO IL RISULTATO 4.873 CON LA TABELLA:

- $\alpha = 0.1 \rightsquigarrow 2.706 < 4.873 \Rightarrow$ RIFIUTIAMO H_0
- $\alpha = 0.05 \rightsquigarrow 3.841 < 4.873 \Rightarrow$ RIFIUTIAMO H_0

• $\alpha = 0.01 \rightsquigarrow 6.635 > 4.873 \Rightarrow$ ACCETTIAMO H_0

QUINDI, AL 95% X E Y NON SONO INDIP.
NON POSSIAMO AFFERMARE PERÓ LO STESSO CON PRECISIONE DEL 99%.