(ULTERIORI METODI DI RISOLUZIONE DI INTEGRALI INDEFINITI, PROSEGUE DALLA LEZ. 24 DEL 20-12-23)

- INTEGRALE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE:
  RICORDIAMO CHE PER CALCOLARE $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$

  - CASO 1: GRADO DEL NUMERATORE $N(x)$ É $\geq$ DI QUELLO DEL DENOM. $D(x)$
    $\Rightarrow$ DIVISIONE TRA POLINOMI, FINO AD OTTENERE AL NUM. UN POLINOMIO DI GRADO $<$ DI QUELLO AL DENOM.

  - CASO 2: SEGUIAMO LA "SCALETTA"
    a) IL NUMERATORE É LA DERIVATA DEL DENOMINATORE (GIA' FATTO)
    b) IL DENOM. É DI 1° GRADO (GIA' FATTO)
    c) IL DENOM. É DI 2° GRADO (MANCANTE)
    d) IL DENOM. É DI GRADO > 2 $\Rightarrow$ SI SCOMPONE E CI SI RICONDUCE A

UNO DEI CASI SOPRA.
(GIÀ FATTO)

(C) TRATTIAMO IN GENERALE

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$$

DOVE CALCOLIAMO $\Delta = b^2 - 4ac$

c.I) $\Delta > 0 \longrightarrow$ IL DENOMINATORE SI PUÒ SCOMPORRE, POI SI "SPEZZA" LA FRAZIONE

Es: $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$ $\qquad \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ HA 2 SOLUZIONI,

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \overset{+}{\nearrow}\ 2 \\ \underset{-}{\searrow}\ -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{5x-1}{(x-2)(x+1)}\,dx$$

ORA SPEZZO LA FRAZIONE:

$$\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$A, B \in \mathbb{R}$
NON LI
[illegible]

$$\boxed{5x-1} \over (x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

NON LI CONOSCO, MA LI CALCOLO COME QUI

$$= \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{\boxed{Ax+A+Bx-2B}}{(x-2)(x+1)}$$

$5x-1$ DEV' ESSERE UGUALE A $(A+B)x+(A-2B)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = A+B \\ -1 = A-2B \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6 = 3B \\ 5 = A+B \end{cases} ; \quad \begin{cases} B = 2 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{5x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= 3\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 3\ln|x-2| + 2\ln|x+1| + c$$

C. II) $\Delta = 0 \Rightarrow$ SCOMPONIAMO L' INTEGRALE COME SOMMA DI DUE PEZZI, UNO CON IL

COME SOMMA DI DUE PEZZI, UNO CON IL NUM. LA DERIVATA DEL DENOM., L'ALTRO CON SOLO UNA COSTANTE, SU CUI SFRUTTIAMO LA FORMULA DELLA POTENZA -2 . . .

Es: $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4}\,dx$ $\qquad \Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 16-16=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4 = (x-2)^2$

$D[x^2-4x+4] = 2x-4$

$$\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{2x-4+1}{x^2-4x+4}\,dx$$

$$= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx$$

$$= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}\,dx + \int (x-2)^{-2}\,dx$$

(a)

$$= \ln|x^2-4x+4| + \frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= \ln|(x-2)^2| - \frac{1}{} + c$$

$$= \ln |(x-2)^2| - \frac{1}{(x-2)} + c$$

$$= \ln |x-2|^2 - \frac{1}{x-2} + c = 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + c$$

c. III) $\Delta < 0 \Rightarrow$ IL DENOM. NON SI PUÒ SCOMPORRE $\Rightarrow$ SI USA LA FORMULA

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg}[f(x)] + c$$

CON $f(x)$ QUADRATO DI BINOMIO

Es: $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ $\qquad \Delta = (+2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 4-8 = -4$

VOGLIO RENDERE $x^2+2x \ldots ? \ldots$ UN QUADRATO DI BINOMIO. COMPLETAMENTO DEI QUADRATI...

$x^2 \rightarrow$ QUADRATO $\rightarrow x$

$+2x \rightarrow$ DOPPIO PRODOTTO $\rightarrow 2x = 2\cdot x\cdot \boxed{1}$

$? \rightarrow$ QUADRATO $\rightarrow 1$

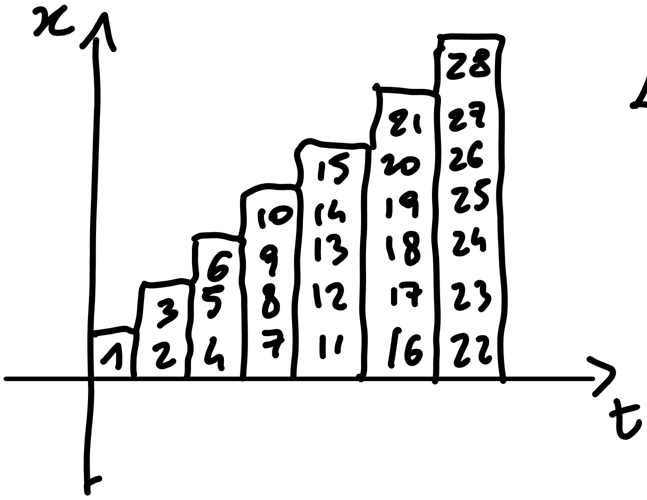
$$x^2+2x+2 = (x^2+2x+1)+1 = (x+1)^2+1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[(x+1)\right] + c$$

APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI ALLE SCIENZE.

INTEGRALI E VELOCITÀ: SE PARTO DA FERMO E OGNI SECONDO CHE PASSA FACCIO UN PASSO IN PIÙ RISPETTO AL (SECONDO) PRECEDENTE, QUANTI PASSI HO ~~FATTO~~ DOPO 7 s?



Δx = SPOSTAMENTO TOTALE

$$= 1+2+3+4+5+6+7$$

$$= \sum_{i=1}^{7} i = 28$$

NELL'INTERVALLO $\Delta t = 7$ s

COSA SUCCEDE SE ABBIAMO UNA VARIAZIONE <u>CONTINUA</u> DELLA VELOCITÀ NEL TEMPO?

$$\Delta t \longrightarrow dt$$

$$\sum \longrightarrow \int$$

DEFINIAMO LA VELOCITÀ COME

$$v = \frac{dx}{dt}$$

OSSIA LA DERIVATA DELLO SPOSTAMENTO x RISPETTO AL TEMPO t.

ES: SE $v = 1 \frac{m}{s}$, QUANTO SPAZIO PERCORRO DOPO 3 s ?

$$x = \int_0^3 v \, dt = \int_0^3 1 \, dt = [t]_0^3 = 3 - 0 =$$
$$= 3 \text{ m}$$

[SE v É LA DERIVATA DELLO SPAZIO x, x É L'INTEGRALE DELLA VELOCITÁ v.]

2) $v = at + v_0$ $\quad a \in \mathbb{R}$ É DETTA ACCELERAZ. $v_0 \in \mathbb{R}$ VELOCITÁ INIZIALE

$$x = \int v \, dt = \int (at + v_0) \, dt$$
$$= a \int t \, dt + v_0 \int 1 \, dt = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + c$$
$$= \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$$

3) $v = \sin(t) \frac{m}{s}$ QUANTO VALE LO SPOSTAMENTO DOPO π SECONDI?

$$x = \int_0^\pi \sin(t) \, dt = \left[-\cos(t)\right]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$
$$= -(-1) + 1 = 2 \text{ m}$$

AVENDO VISTO IL TEO. DELLA MEDIA INTEGRALE,

POSSIAMO CALCOLARE LA VELOCITÀ MEDIA COME

$$v_M = \frac{\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt}{\pi - 0} = \frac{2\ m}{\pi\ s} = \frac{2}{\pi}\ \frac{m}{s}$$

4) IL CONSUMO DI UN MACCHINARIO: SUPPONIAMO CHE AL TEMPO t (IN ORE) UN MACCHINARIO CONSUMI $\frac{3t+2}{6t+1}$ LITRI DI BENZINA

→ QUANTA BENZINA VIENE CONSUMATA DOPO UN'ORA DALL'ACCENSIONE $(t=0)$

$$C = \int_0^1 \frac{3t+2}{6t+1}\,dt$$

DIVISIONE TRA POLINOMI:

$$\begin{array}{r|l} 3t+2 & 6t+1 \\ \hline 3t+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline // \quad \frac{3}{2} & \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{3t+2}{6t+1}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} + \frac{3/2}{6t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dt + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{6t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\right]_0^1 + \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_2}\left[\ln|6t+1|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\left(\ln|7| - \underbrace{\ln|1|}_{=0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 7$$

$$\simeq 1.97 \; l$$

QUANTI LITRI SERVONO INVECE PER TENERLO ACCESO 4 h ?

$$\int_0^4 \frac{3t+2}{6t+1}\,dt = \ldots \text{ (ESERCIZIO)}$$

5) GITTATA CARDIACA: DATA $c(t)$ LA CONCENTRAZIONE DI TINTA NEL SANGUE ALL'ISTANTE t, SI MISURA LA GITTATA G SAPENDO CHE

$c(t) \cdot G =$ SANGUE "TINTO" POMPATO DAL CUORE ALL'ISTANTE t

$Q = \int_0^T c(t) \cdot G \, dt =$ Q.TÁ DI SANGUE TINTO POMPATO NELL'INTERV. $[0,T]$

$$= G \cdot \int_0^T c(t)\,dt$$

$$\Longrightarrow \quad G = \frac{Q}{\int_0^T c(t)\,dt}$$

Es: $Q = 2 \; l$, $\quad c(t) = e^{-2t} \; \text{min}$, $\quad [0, 10]$

$$G = \frac{2}{\int_0^{10} e^{-2t} \ldots} = \frac{2}{\ldots} = \frac{2}{\ldots}$$

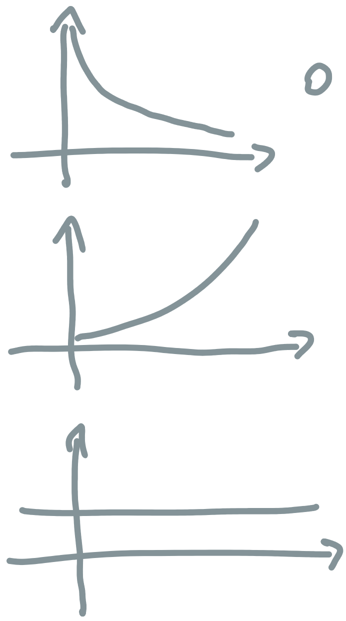
$$G = \frac{2}{\int_0^{10} e^{-2t}\,dt} = \frac{2}{-\frac{1}{2}\int_0^{10} -2e^{-2t}\,dt} = \frac{2}{-\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\right]_0^{10}}$$

$$= \frac{2}{-\frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{-20}}_{\simeq 0} - e^0\right)} = \frac{2}{-\frac{1}{2}(-1)} = 2 \cdot 2 = 4 \ \ell/_{min}$$

6) <u>LEGGE DI MALTHUS</u>: É UN MODELLO CHE DESCRIVE LA CRESCITA (O DECRESCITA) DI UNA POPOLAZIONE ISOLATA. LA FUNZIONE MODELLO É DELLA FORMA

$$N(t) = N_0 \cdot e^{R(t)}$$

DOVE $R : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ É UNA FUNZIONE CHE DESCRIVE LA VARIAZIONE DEL N° DI INDIVIDUI



ES: $N_0 = 50$,

$$R(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{5}\right)$$

$$\Rightarrow N(t) = 50 \cdot e^{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{5}\right)}$$

QUANTI INDIVIDUI AL TEMPO $t=0$? $\rightarrow N(0) = 50 \cdot e^0 = 50 \cdot 1 = 50$

QUANTI INDIVIDUI AL TEMPO

$t=0$? $\rightsquigarrow N(0) = 50 \cdot e^{0} = 50 \cdot 1 = 50$

$t = 10\pi$? $\rightsquigarrow N(10\pi) = 50 \cdot e^{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{10\pi}{5}\right)} =$

$= 50 \cdot e^{0} = 50 \cdot 1 = 50$

QUANTI INDIVIDUI CI SONO MEDIAMENTE IN $[0, 10\pi]$?

$$\text{POPOLAZ.}_{\text{MEDIA}} = \frac{\int_0^{10\pi} 50 \cdot e^{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{5}\right)} dt}{10\pi} \simeq 33.4$$

ESERCIZI:

1) RISOLVERE I SEGUENTI INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE:

$$\int \frac{3x-5}{x^2-2x-3}\,dx \qquad \int \frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$

2) INTEGRALI E VELOCITÀ: CALCOLARE LO SPOSTAMENTO DI UN RAZZO CHE PARTE DA FERMO $\left(v_0 = 0 \ \frac{m}{s}\right)$ E SI MUOVE A VELOCITÀ $v = t^2 \ \frac{m}{s}$ NELL'INTERVALLO $[0, 60]$.

3) RIPRENDIAMO IL MACCHINARIO DELL'ES. 4.

$3t+2$

3) RIPRENDIAMO IL MACCHINARIO DELL ES. 4.
CONSUMO: $\frac{3t+2}{6t+1}$. CALCOLARE IL CONSUMO
NELL' INTERVALLO $[4,8]$: SI OTTIENE
UN RISULTATO MAGGIORE O MINORE DI
QUELLO IN $[0,4]$? POTEVA ESSERE
DEDOTTO MATEMATICAMENTE?

4) MEDIA INTEGRALE: SUPPONIAMO CHE LA
PRESSIONE DI UN PAZIENTE SIA DATA
DALLA FUNZIONE $p(t) = \sin(t)$. CALCOLARE
LA PRESSIONE MEDIA IN $t \in [0, 20\pi]$
$(20\pi \simeq 60)$.