20/12/2023

martedì 19 dicembre 2023 12:49

ES. LEZ. SCORSA:

1) $\int_{-1}^{4} (x^2+2)\, dx$ (a) CERCHIAMONE UNA PRIMITIVA RISOLVENDO $\int x^2+2\, dx$

$$\int x^2+2\, dx = \int x^2\, dx + 2\int 1\, dx = \frac{x^3}{3} + 2x + c$$

(b) CALCOLIAMO $\int_{-1}^{4} x^2+2\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{4}$

$$= \left(\frac{4^3}{3} + 2\cdot 4\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2\cdot(-1)\right) =$$

$$= \frac{64}{3} + 8 + \frac{1}{3} + 2 = \frac{65}{3} + 10 = \frac{65+30}{3} = \frac{95}{3}$$

2) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\, dx \xrightarrow{(a)} \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$

$$\xrightarrow{(b)} \int_{1}^{e} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x|\right]_{1}^{e} = (\ln|e|) - (\ln|1|)$$

$$= \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

3) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \leftarrow$ ASINTOTO VERTICALE PER $x=0$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \left(2\cdot 1^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{t} \right) = 2 - 0 = 2$$

4) $$\int_2^5 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_2^5 = \left(\frac{5^2}{2} + 5 \right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2 \right)$$

$$= \frac{25}{2} + 5 - \frac{4}{2} - 2 = \frac{21}{2} + 3 = \frac{21+6}{2} = \frac{27}{2}$$

5) $$\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^2 = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1}{1} \right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \ldots$$

6) $$\int_4^9 \left(3x^{\frac{1}{2}} + 2x \right) dx = \left[3\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \cancel{2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}} \right]_4^9 =$$

$$= \left[\cancel{3}\cdot \frac{x^{3/2}}{\cancel{3}/2} + x^2 \right]_4^9 = \left[2\sqrt{x^3} + x^2 \right]_4^9 =$$

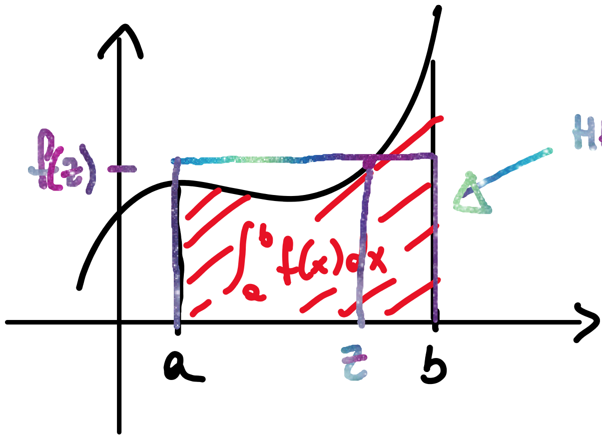
$$= \left(2\sqrt{9^3} + 9^2 \right) - \left(2\sqrt{4^3} + 4^2 \right) = \left(2\cdot 27 + 81 \right) - \left(2\cdot 8 + 16 \right)$$

$$= 54 + 81 - 16 - 16 = 103$$

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE (...

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE: (O DEL VALOR MEDIO)

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA. ALLORA ESISTE $z\in[a,b]$ TALE CHE $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(z)$



HA AREA BASE × ALTEZZA $= (b-a)\cdot f(z)$

IN PARTICOLARE $f(z) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ É CHIAMATO **MEDIA** DI $f(x)$ IN $[a,b]$.

DIMOSTRAZIONE: f É CONTINUA IN $[a,b]$ $\Longrightarrow$ PER IL TEOREMA DI WEIERSTRAß f AMMETTE MAX M E MIN m, OSSIA

$$m \le f(x) \le M$$

INTEGRO TUTTI I MEMBRI IN $[a,b]$

$$m(b-a) = m[x]_a^b = m\int_a^b 1\,dx = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M\int_a^b 1\,dx = M[x]_a^b = M(b-a)$$

OSSIA $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

DIVIDO TUTTO PER $(b-a)>0$ (QUINDI CON STESSO VERSO)

$$m = \frac{m\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}} \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq \frac{M\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}} = M$$

QUINDI IL VALORE $c = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ É COMPRESO TRA m ED M. PER IL TEO. DEI VALORI INTERMEDI $\exists\, z \in [a,b]$ T.C.

$$f(z) = c = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \Longrightarrow (b-a)\,f(z) = \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

ESERCIZIO: DIRE SE LE SEGUENTI FUNZIONI SODDISFANO LE IPOTESI DEL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE.

$y = \frac{4}{x-1}$ IN $[1,4]$ $\longrightarrow$ NO, NON É CONTINUA IN $x=1$

$y = \sqrt{x}$ IN $[0,6]$ $\longrightarrow$ SÍ

$y = \ln(x+3)$ IN $(-1,0]$ $\longrightarrow$ NO, L'INTERVALLO NON É CHIUSO

ESERCIZI: DATI I SEGUENTI INTEGRALI DEFINITI,

CALCOLARNE PER PRIMA COSA UNA PRIMITIVA $F(x)$, POI CONCLUDERE CON LA FORMULA $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

1) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x^2+x+1}{2x-1}\,dx \rightsquigarrow$ CALCOLIAMO $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{2x-1}\,dx$

IL GRADO DEL NUM. É $\geq$ DI QUELLO DEL DENOM.

$\Rightarrow$ DIVISIONE TRA POLINOMI

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & +x & +1 & 2x-1 \\ \cline{4-4}
-(2x^2 & -x) & & x+1 \\ \cline{1-3}
// & 2x & +1 & \\
& -(2x & -1) & \\ \cline{2-3}
& // & 2 &
\end{array}$$

$$\int \frac{2x^2+x+1}{2x-1}\,dx = \int x+1+\frac{2}{2x-1}\,dx$$

$$= \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{2}{2x-1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|2x-1| + c$$

$$\rightarrow \int_2^4 \frac{2x^2+x+1}{2x-1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x+\ln|2x-1|\right]_2^4$$

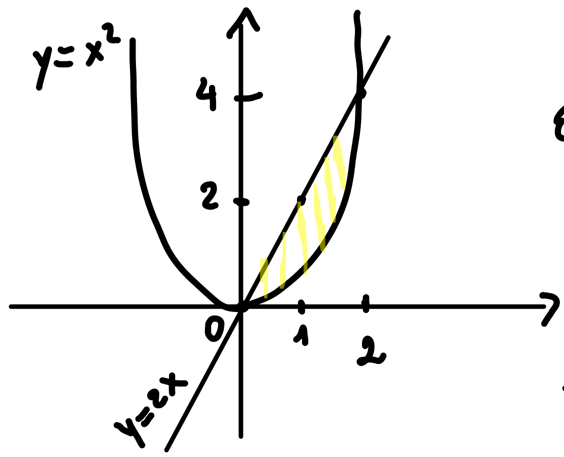
$$= \left(\frac{4^2}{2}+4+\ln|2\cdot4-1|\right) - \left(\frac{2^2}{2}+2+\ln|2\cdot2-1|\right)$$

$$= \left(\frac{4^2}{2} + 4 + \ln|2\cdot 4 - 1|\right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2 + \ln|2\cdot 2 - 1|\right)$$

$$= 8 + 4 + \ln 7 - (2 + 2 + \ln 3) = 12 + \ln 7 - 4 - \ln 3$$

$$= 8 + \ln 7 - \ln 3 = 8 + \ln\frac{7}{3}$$

2) AREA TRA I GRAFICI DI $y = 2x$ E $y = x^2$

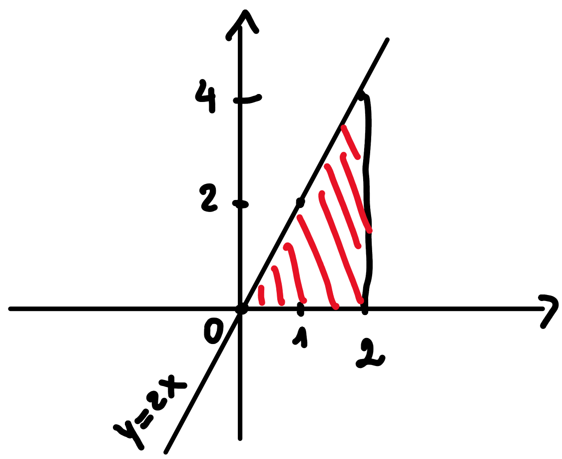


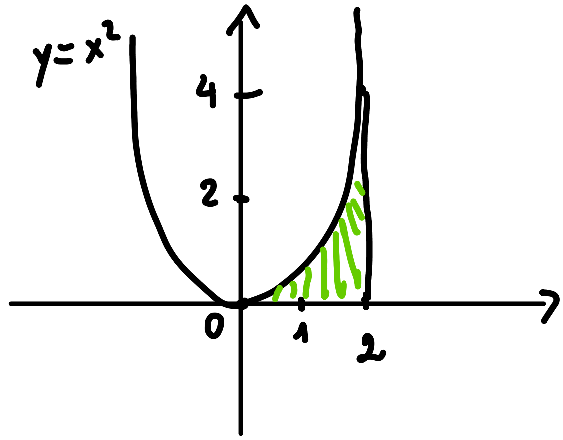
I DUE GRAFICI SI INTERSECANO QUANDO

$$2x = x^2$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

$\longrightarrow \quad x = 0 \quad$ E $\quad x = 2$

CALCOLIAMO L'AREA IN GIALLO TOGLIENDO DA QUELLA ROSSA LA VERDE





$$A_{ROSSA} = \int_0^2 2x \, dx \qquad\qquad A_{VERDE} \int_0^2 x^2 \, dx$$

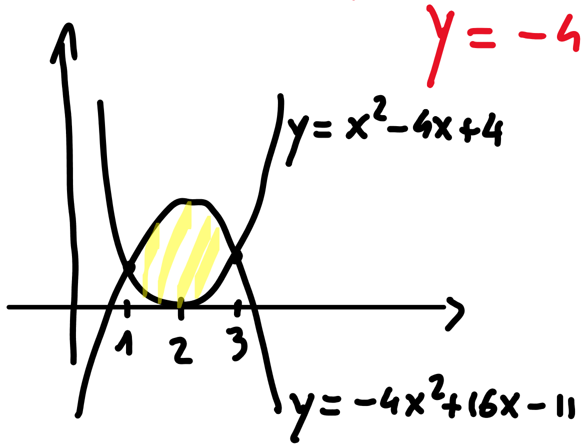
$$\Longrightarrow A_{GIALLA} = A_{ROSSA} - A_{VERDE} = \int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx$$

$$\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left[2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \left(2 \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(2 \cdot \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

ESERCIZIO: 3) AREA TRA $y = x^2 - 4x + 4$ E $y = -4x^2 + 16x - 11$



4) $\int_1^3 \frac{4x+3}{2x^2+3x}\,dx$ $\rightsquigarrow$ CALCOLIAMO $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x}\,dx$

$\rightsquigarrow$ IL NUMERATORE É LA DERIVATA DEL DENOM.?

$D[2x^2+3x] = 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 4x + 3$ ✓

$\rightsquigarrow \int \frac{4x+3}{2x^2+3x}\,dx = \ln|2x^2+3x| + c$

$$\int_1^3 \frac{4x+3}{2x^2+3x}\,dx = \Big[\ln|2x^2+3x|\Big]_1^3$$

$$= \left(\ln|2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3|\right) - \left(\ln|2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1|\right) = \ln 27 - \ln 5$$

5) $\int_1^3 3x^2 \ln x\,dx$ $\rightsquigarrow$ CALCOLIAMO $\int 3x^2 \ln x\,dx$

5) $\int_1^3 3x^2 \ln x \, dx$ $\rightsquigarrow$ CALCOLIAMO $\int \underbrace{3x^2}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g} \, dx$

INTEGRO PER PARTI:

$$\int 3x^2 \cdot \ln x \, dx = x^3 \cdot \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$\left[\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx \right]$$

$$= x^3 \cdot \ln x - \int x^2 \, dx = x^3 \cdot \ln x - \frac{x^3}{3} + C$$

[ESERCIZIO: FARE LA PROVA!]

$$\int_1^3 3x^2 \cdot \ln x \, dx = \left[x^3 \cdot \ln x - \frac{x^3}{3} \right]_1^3$$

$$= \left(3^3 \cdot \ln 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(1^3 \ln 1 - \frac{1^3}{3} \right)$$

$$= \left(27 \cdot \ln 3 - 9 \right) - \left(1 \cdot 0 - \frac{1}{3} \right) = 27 \ln 3 - 9 + \frac{1}{3}$$

NOTA: ULTERIORI METODI DI CALCOLO DI UNA PRIMITIVA (INTEGRALI INDEFINITI, COMPLETA LA LEZ. 22 DEL 15-12)

- INTEGRALE DI FUNZIONI COMPOSTE:

$$f(g(x)) = \int D[f(g(x))] \, dx = \int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx$$

[ESEMPI: 1) $\int x \cdot e^{x^2} \, dx$ LA FUNZIONE e^{x^2} É

ESEMPI : 1) $\int x \cdot e^{x^2} dx$

LA FUNZIONE e^{x^2} É COMPOSTA E HA COME DERIVATA $\underbrace{2x}_{g'} \cdot \underbrace{e^{x^2}}_{f'(g(x))}$ (★)

MOLTIPLICO E DIVIDO PER 2 PER OTTENERE ★

$$= \int \frac{1}{2} \cdot 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

2) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ É COMPOSTA

PENSO A $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ...

$$D\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \underbrace{\left(\cos \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}$$

MOLT. E DIVIDO PER $1/2$ ...

$$2 \int \underbrace{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx} = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

ESERCIZI : 1) $\int \frac{x^2}{x^3 - 1} dx$ 2) $\int \sqrt{4x+1}\, dx$

3) $\int 2x \left(x^2 - 1\right)^3 dx$

- **INTEGRALE PER SOSTITUZIONE :**

CAMBIO LA VARIABILE $x \longmapsto t$. SIA $x(t)$

CAMBIAMENTO DI VARIABILE $\Longrightarrow$

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot \frac{1}{x'(t)} dt$$

ESEMPIO: $\int 2x\,(x^2-1)^3\,dx$

$t = x^2-1$

$t+1 = x^2$

$\sqrt{t+1} = x$

$\frac{1}{2\sqrt{t+1}} \cdot dt = 1 \cdot dx$

$$= \int \cancel{2} \cdot \cancel{\sqrt{t+1}} \cdot (t)^3 \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{t+1}}}\,dt$$

$$= \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{(x^2-1)^4}{4} + c$$

ESERCIZIO: $\int \cos^2 x \cdot \sin x\,dx$

CON SOST.

$t = \cos x$

$dt = -\sin x\,dx$