19/12/2023

venerdì 15 dicembre 2023 16:42

PREMESSA: 2 TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE SU UN INTERVALLO $[a,b]$.

TEOREMA DI WEIERSTRAß:

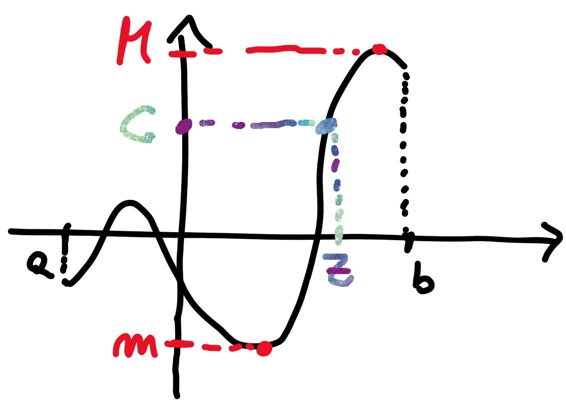
SIA $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA. ALLORA f AMMETTE MAX E MIN ASSOLUTI SU $[a,b]$, OSSIA $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M$$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI:

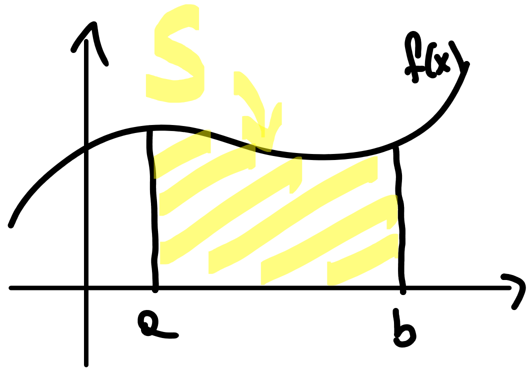
SIA $f:[a,b]$ CONTINUA, m = MIN ASSOLUTO, M = MAX ASSOLUTO. ALLORA f ASSUME ALMENO UNA VOLTA TUTTI I VALORI TRA m E M, OSSIA $\forall c \in [m, M]$ $\exists\, z \in [a,b]$ TALE CHE

$$f(z) = c$$

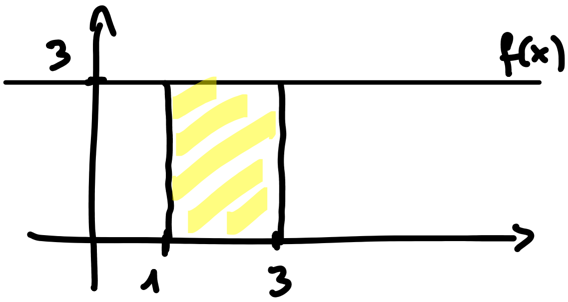


INTEGRALI DEFINITI: IL PROBLEMA DELLE AREE.

CI PONIAMO L'OBIETTIVO, DATA UNA FUNZIONE CONTINUA $f(x)$, DI CALCOLARE L'AREA TRA IL SUO GRAFICO E L'ASSE x IN UN INTERVALLO $[a,b] \subseteq D$ (D = DOMINIO DI f).

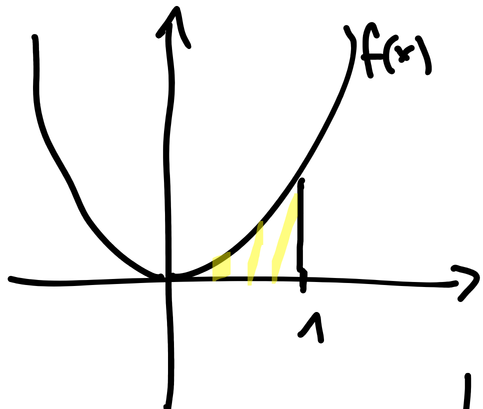


ESEMPIO: 1) $f(x) = 3$, AREA IN $[1,3]$

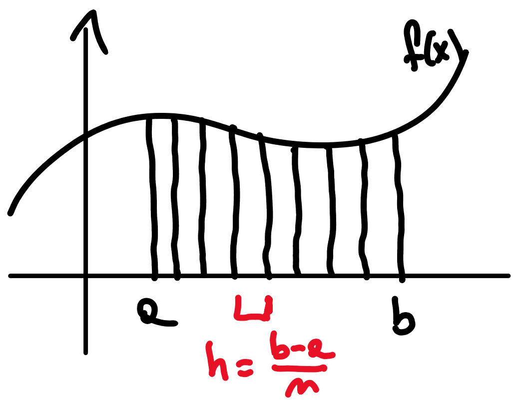


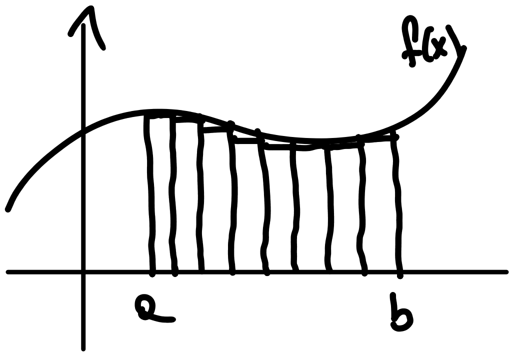
$\longrightarrow$ LA SUPERFICIE DA CALCOLARE É UN RETTANGOLO DI BASE 2 E ALTEZZA 3 $\Longrightarrow S = 2 \cdot 3 = 6$

2) CALCOLARE L'AREA SOTTESA A $f(x) = x^2$ NELL'INTERVALLO $[0,1]$. $\Longrightarrow S = ?$

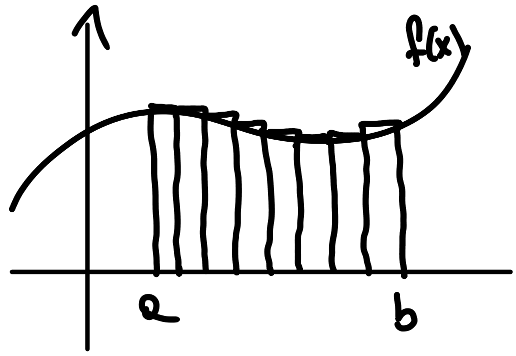


L'APPROCCIO A TALE CALCOLO NASCE PER APPROSSIMAZIONI: SUDDIVIDIAMO $[a,b]$ IN n INTERVALLI EQUIDISTANTI E CALCOLIAMO S APPROSSIMANDOLO CON RETTANGOLI





APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO: OGNI RETTANGOLO HA ALTEZZA DATA DAL VALORE MIN DI f IN CIASCUN INTERVALLO (CHIAMIAMOLA s_n)



APPROSSIMAZIONE PER ECCESSO: OGNI RETTANGOLO HA ALTEZZA DATA DAL VALORE MAX DI f IN CIASCUN INTERVALLO. (CHIAMIAMOLA S_n)

• STEP: - ABBIAMO SUDDIVISO $[a,b]$ IN

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad \text{CON}$$

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + h$$
$$x_2 = a + 2h$$
$$\vdots$$
$$x_k = a + kh$$
$$\vdots$$
$$x_n = a + nh = a + \cancel{n} \cdot \frac{(b-a)}{\cancel{n}} = a + b - a = b$$

• PRESO $m_k = \min\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, CALCOLATO s_n

COME LA SOMMA DEI RETTANGOLI APPROSSIMATI PER DIFETTO (IL RETTANGOLO TRA x_{k-1} E x_k HA AREA $h \cdot m_k$) $\Rightarrow$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} h \cdot m_k = h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + \dots + h \cdot m_n$$

$$= h(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = h \sum_{k=1}^{n} m_k$$

- PRESO $M_k = \max_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, CALCOLATO S_n COME LA SOMMA DEI RETTANGOLI APPROSSIMATI PER ECCESSO:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} h \cdot M_k = h \sum_{k=1}^{n} M_k$$

CHIARAMENTE, L'AREA S CHE VOGLIAMO CALCOLARE È MAGGIORE DELLA SUA APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO E PIÚ PICCOLA DELLA SUA APPROSSIMAZIONE PER ECCESSO:

$$s_n \le S \le S_n$$

TALE APPROSSIMAZIONE É TANTO MIGLIORE QUANTO PIÚ n É GRANDE

$$\lim_{n \to \infty} s_n \le S \le \lim_{n \to \infty} S_n$$

SE I DUE LIMITI COINCIDONO, PER IL TEO. DEI DUE CARABINIERI ANCHE S AVRÁ STESSO VALORE.

DEF: SI DEFINISCE "INTEGRALE DEFINITO DA a A b" DI $f(x)$ IL NUMERO

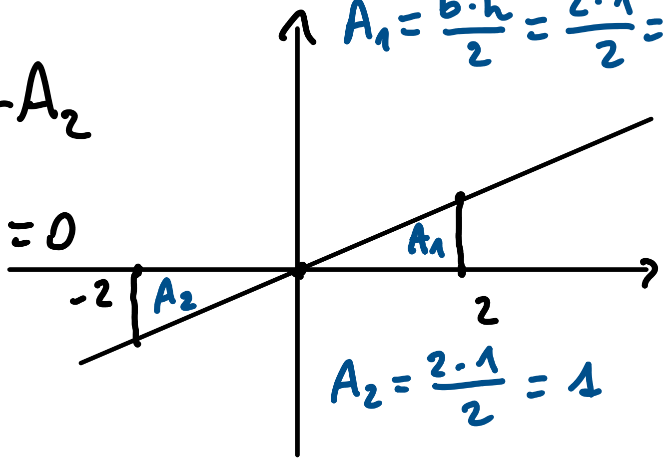
$$S = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

ER

NOTA: SE f HA SEGNO QUALSIASI (SIA POSITIVO SIA NEGATIVO) L'AREA DEL GRAFICO SOTTO L'ASSE x VA CONTATA COL SEGNO MENO.

ESEMPIO:
$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}x \, dx = A_1 - A_2$$
$$= 1 - 1 = 0$$

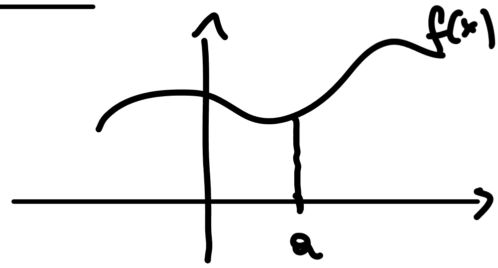
$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

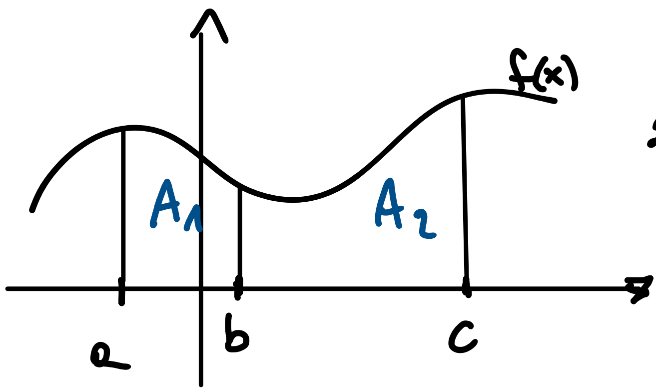


$A_2 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DEFINITI:

1) $\int_a^a f(x) \, dx = 0$





2) $\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_b^c f(x)dx}_{A_2} = \int_a^c f(x) dx$

3) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

4) $\int_a^b \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$

4 bis) $\int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$

4bis) $\int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

5) $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

6) (MONOTONIA) SE $f(x) < g(x)$ IN $[a,b]$ $\Longrightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

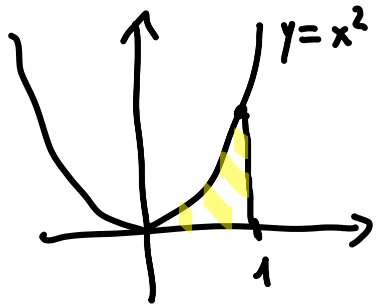
TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:

SIA $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA. ALLORA LA FUNZIONE (COSIDDETTA "INTEGRALE") $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ HA COME DERIVATA PROPRIO f, OSSIA $F'(x) = f(x)$, OSSIA F É UNA PRIMITIVA DI f. ALLORA

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

DOVE F É UNA (QUALSIASI) PRIMITIVA DI f.

ESEMPI: 1) $\int_0^1 x^2\,dx$



UNA PRIMITIVA PER x^2 É

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \qquad \left(\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \right)$$

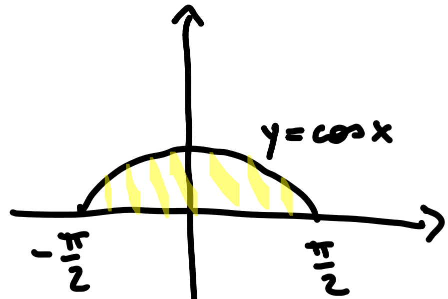
$$\Longrightarrow \int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0} =$$

" $\frac{x^3}{3}$ CALCOLATO IN $x=1$ MENO $\frac{x^3}{3}$ CALCOLATO IN $x=0$ "

$$= \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

2) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

NOTAZIONE



$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2 \in \mathbb{R}$$

3) $$\int_0^2 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^2$$

$$= e^2 - e^0 = e^2 - 1 \in \mathbb{R}$$

ESERCIZI: 4) $\int_{-1}^{4} (x^2+2)\,dx$ 5) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

RICAPITOLANDO: PER CALCOLARE UN INTEGRALE DEFINITO $\int_a^b f(x)\,dx$ BISOGNA:

1) CALCOLARNE LE PRIMITIVE USANDO L'INTEGRALE INDEFINITO $\int f(x)\,dx = F(x)$

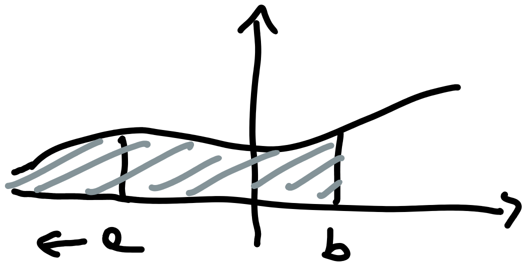
2) CALCOLARE $F(b) - F(a)$, DOVE $F(x)$ É UNA PRIMITIVA TROVATA AL PUNTO PRECEDENTE.

INTEGRALI GENERALIZZATI:

SONO INTEGRALI DEFINITI AVENTI UN INTERVALLO ILLIMITATO (AD ESEMPIO $[-1, +\infty)$).

ANCHE IN QUESTO CASO VALE IL TEOREMA FONDAMENTALE MA SFRUTTANDO IL CALCOLO DI UN LIMITE;

a)



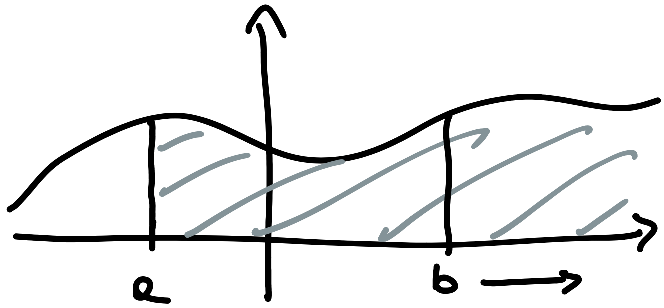
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \Big(F(b) - F(a) \Big)$$

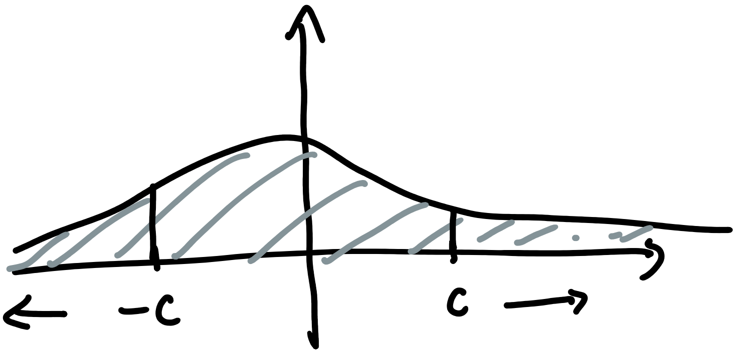
b)

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \Big(F(b) - F(a) \Big)$$



c)



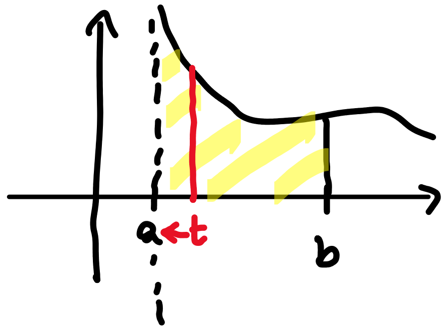
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \Big(F(c) - F(-c) \Big)$$

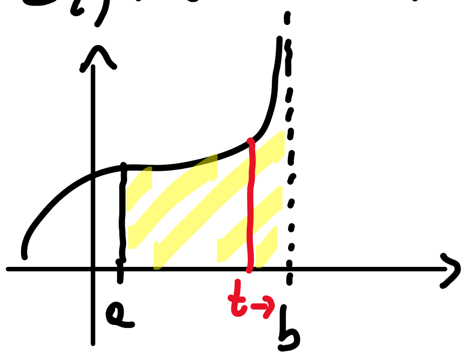
IN REALTÀ VENGONO CHIAMATI INTEGRALI GENERALIZZATI ANCHE QUELLI DOVE LA FUNZIONE INTEGRANDA PRESENTA UN ASINTOTO VERTICALE IN $[a, b]$. SE...

$d_1)$ ... L'ASINTOTO É NEL PRIMO ESTREMO:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$



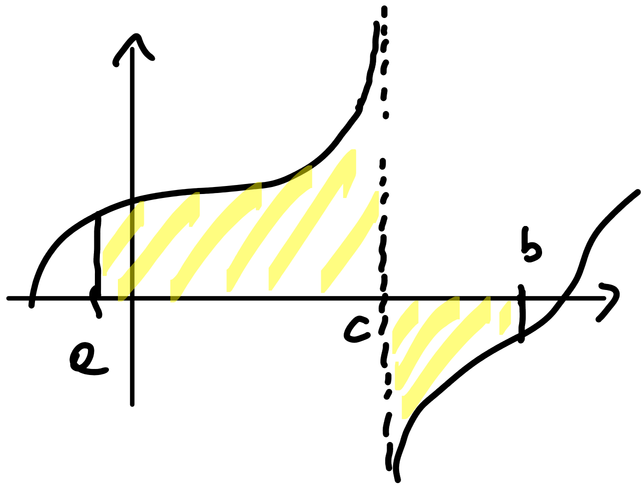
$d_2)$ ... L'ASINTOTO É NEL SECONDO ESTREMO:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

$d_3)$ ... L'ASINTOTO É "IN MEZZO", OSSIA IN $c \in (a,b)$;

(SPEZZO IN DUE L'INTEGRALE, POI USO $d_1 + d_2$)



$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{A.V. NEL } 2^\circ \text{ ESTREMO}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\text{A.V. NEL } 1^\circ \text{ ESTREMO}}$$

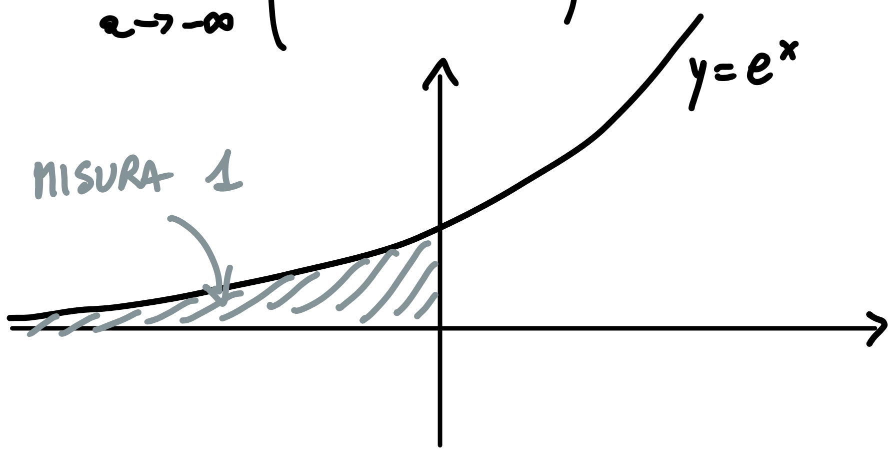
$$= \underbrace{\lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx}_{(d_2)} + \underbrace{\lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)\,dx}_{(d_1)}$$

ESEMPI: 1) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ $\qquad \left[\int e^x\,dx = e^x + c\right]$

$[e^x]^0 \overset{(a)}{=} \lim [e^x]^0 =$

$$= \left[e^x\right]_{-\infty}^{0} \overset{(a)}{=} \lim_{a\to-\infty} \left[e^x\right]_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(e^0 - e^a\right) = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$$



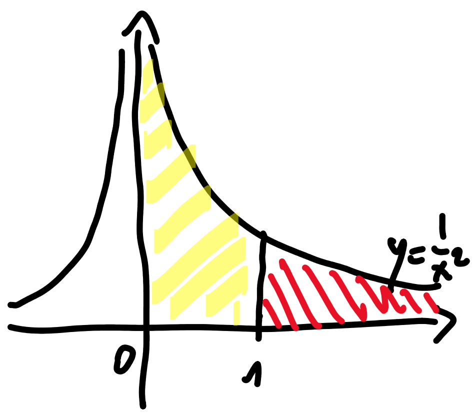
2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx =$ $\left[\frac{1}{x^2} \right.$ HA UN ASINTOTO VERTICALE IN $x=0$. INOLTRE $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$ $\left.\right]$

$$\overset{(d_1)}{=} \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t}\right) = -1 + \frac{1}{0^+} = -1 + \infty$$

$$= +\infty$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = -\frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

ESERCIZIO: 3) CALCOLARE $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

4) (INT. DEF. SEMPLICI)

$\int_2^5 (x+1)\,dx$, $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$, $\int_4^9 (3\sqrt{x}+2x)\,dx$.