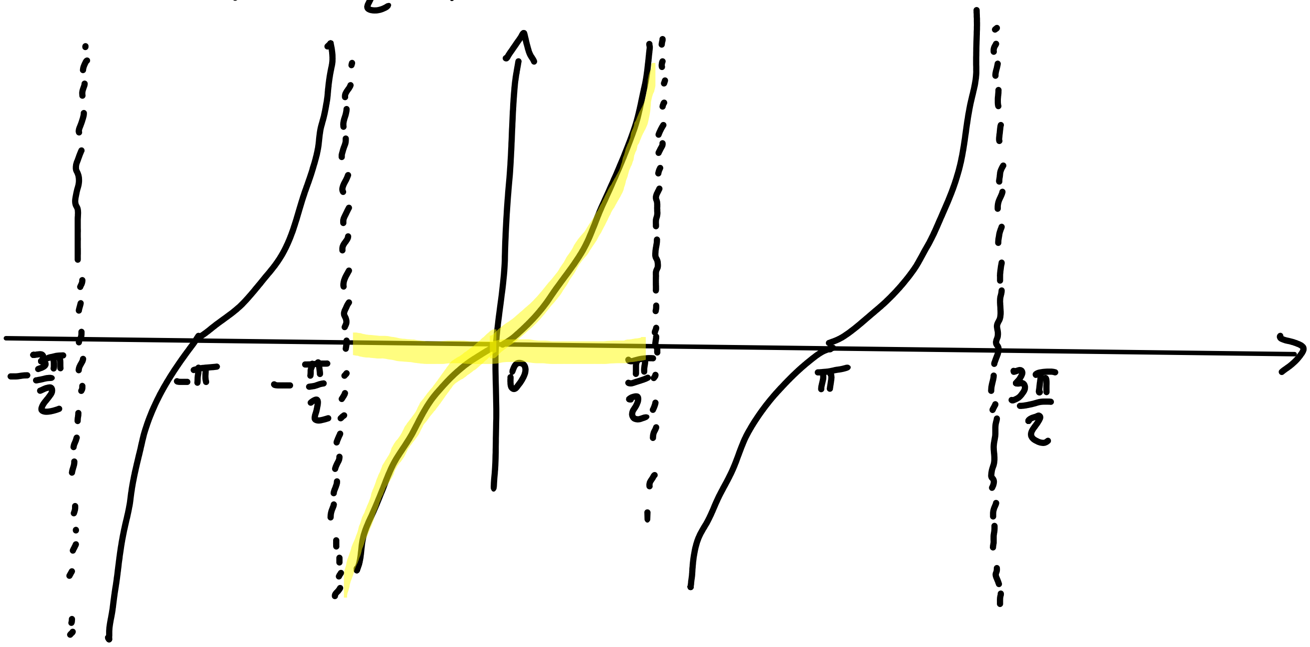
15/12/2023

mercoledì 13 dicembre 2023 09:00

NOTA: POICHÉ $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ É DEFINITA $\forall x \neq k\frac{\pi}{2}$, E HA GRAFICO



IN PARTICOLARE LA TANGENTE É BIETTIVA IN $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. LA SUA INVERSA É CHIAMATA ARCOTANGENTE, OSSIA LA FUNZIONE

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}: \mathbb{R} &\longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\longmapsto \operatorname{arctg} x \end{aligned}$$

DOVE $\operatorname{arctg} x$ É L'ANGOLO α TALE CHE $tg\,\alpha = x$. AD ESEMPIO

$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\operatorname{arctg}(0) = 0$

$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

RICORDIAMO CHE LA DERIVATA DI $\operatorname{tg} x$ É

$$D[\operatorname{tg} x] = \frac{1}{\cos^2 x}$$

INVECE LA DERIVATA DELL'ARCOTANGENTE É

$$D[\operatorname{arctg} x] = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{1+x^2}$$

OSSERVAZIONE: LA DERIVATA DELL'ARCOTANGENTE É UNA FUNZIONE SEMPRE POSITIVA

$$\left(\frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\right) \xrightarrow[\text{MONOTONIA}]{\text{TEO. DI}} \operatorname{arctg}(x) \text{ É}$$

UNA FUNZIONE OVUNQUE CRESCENTE.

AVEVAMO GIÁ VISTO CHE:

- $\operatorname{arcsen}(x)$ É LA FUNZIONE INVERSA DI $\operatorname{sen} x$
- $\arccos(x)$ É LA FUNZIONE INVERSA DI $\cos x$

LE LORO DERIVATE SONO:

$$D[\operatorname{arcsen}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D[\arccos(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ESERCIZIO: SI PUÓ FARE UN'OSSERVAZ. SIMILE A QUELLA SOPRA ANCHE PER QUESTE 2 FUNZIONI?

AGGIORNIAMO DUNQUE LA TABELLA DEGLI INTEGRALI ELEMENTARI:

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\,dx$
0	c (COSTANTI)
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$

ESEMPI: 1) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ $\leftarrow$ IL NUMERATORE É UN POLINOMIO DI GRADO $\geq$ DEL POLINOMIO AL DENOMINATORE $\Rightarrow$ LA PRIMA COSA DA FARE IN QUESTI CASI É LA DIVISIONE TRA POLINOMI:

$$x^2 \quad \Big| \; x^2 + 1$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
-(x^2+1) & 1 \\ \cline{1-1}
// \quad -1 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ HO OTTENUTO CHE $x^2 : (x^2+1)$ FA 1 CON RESTO -1. SCRIVIAMO ALLORA:

$$
\underbrace{x^2}_{\text{DIVIDENDO}} = \underbrace{1}_{\text{QUOZIENTE}} \cdot \underbrace{(x^2+1)}_{\text{DIVISORE}} + \underbrace{(-1)}_{\text{RESTO}}
$$

$$
\Rightarrow \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\,dx
$$

$$
= \int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx
$$

$$
= x - \operatorname{arctg}(x) + c
$$

2) $$\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{7}{1+x^2}\,dx$$

$$
= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 7\int \frac{1}{1+x^2}\,dx
$$

$$
= 2\arcsin(x) + 7\operatorname{arctg}(x) + c
$$

3) $$\int \left(\frac{1}{4+4x^2} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{1}{4+4x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{4(1+x^2)} dx + 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+x^2} dx + 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x) + 2 \operatorname{arctg}(x) + c = \left(\frac{1}{4} + 2\right) \operatorname{arctg}(x) + c$$

$$= \frac{9}{4} \operatorname{arctg}(x) + c$$

ESERCIZIO: 4) $\int \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \right) dx$

INTEGRAZIONE PER PARTI:

PARTIAMO DALLA FORMULA DELLA DERIVATA DI UN PRODOTTO DI 2 FUNZIONI $f(x)$, $g(x)$:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = D[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot D[g(x)]$$
$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

INTEGRO AMBO I MEMBRI :

$$\int D[f(x) \cdot g(x)] \, dx = \int \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right) dx$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

ALLORA, POSSIAMO CALCOLARE UNO DEI INTEGRALI

A 2° MEMBRO (AD ESEMPIO IL PRIMO) COME

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\, dx$$

DETTA <u>FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI</u>.

ESSA É UTILE <u>SOLO SE L'INTEGRALE A 2° MEMBRO É PIÚ FACILE DA CALCOLARE DI QUELLO AL 1° MEMBRO</u>.

Es: 1) $\int \underset{g}{x}\cdot \underset{f'}{e^x}\, dx = \underset{f\cdot g}{e^x\cdot x} - \underset{\int f\cdot g'\,dx}{\int e^x\cdot 1\, dx}$

$$= e^x\cdot x - \int e^x dx = e^x\cdot x - e^x + c$$

[QUANDO CALCOLO L'INTEGRALE DI UN PRODOTTO $x^n\cdot e^x$ BISOGNA CONSIDERARE x^n COME PRIMITIVA (g) ED e^x COME DERIVATA (f')]

2) $\int \underset{g}{x}\cdot \underset{f'}{\ln x}\, dx = x\cdot \underset{\int \ln x\, dx = ?}{?} - \int 1\cdot ?\, dx$

$$\int \underset{f'}{x}\cdot \underset{g}{\ln x}\, dx = \underset{f\cdot g}{\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot \ln x} - \underset{\int f\cdot g'\,dx}{\int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

[AL CONTRARIO DELL'ES. 1, QUANDO ABBIAMO UN PRODOTTO $x^n \cdot \ln x$ CONVIENE CONSIDERARE COME PRIMITIVA $\ln x$ (g) E COME DERIVATA x^n (f').]

3) $$\int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2} \int \underset{f'}{\underset{\uparrow}{x^{-\frac{1}{2}}}} \cdot \underset{g}{\underset{\uparrow}{\ln x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[2x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x - 2 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\, dx \right]$$

$$= \sqrt{x} \cdot \ln x - \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{x} \cdot \ln x - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \sqrt{x} \cdot \ln x - 2\sqrt{x} + c \, .$$

ESERCIZI: INTEGRARE PER PARTI I SEGUENTI:

4) $\int \ln^2 x \, dx$ (SUGG: $\int \ln x \cdot \ln x \, dx$)

5) $\int \frac{x+2}{e^x} dx$

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE.

VOGLIAMO CALCOLARE INTEGRALI DELLA FORMA $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ DOVE $N(x)$, $D(x)$ SONO 2 POLINOMI.

<u>CASO 1</u>: SE IL GRADO DEL NUMERATORE $N(x)$ É MAGGIORE O UGUALE AL GRADO DEL DENOMINATORE $D(x)$, SI FA LA DIVISIONE TRA POLINOMI E SI RISCRIVE

$$N(x) = \underset{\text{QUOZIENTE}}{Q(x)} \cdot D(x) + \underset{\text{RESTO}}{R(x)}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) \, dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

ADESSO QUINDI IL GRADO DI $R(x)$ É MINORE DI QUELLO DEL DENOMINATORE $D(x)$, E PASSO AL CASO SUCCESSIVO.

<u>CASO 2</u>: (IL GRADO DEL NUMERATORE É MINORE DI QUELLO DEL DENOMINATORE)

È DI QUELLO DEL DENOMINATORE)

a) IL NUMERATORE É LA DERIVATA DEL DENOMINATORE:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

b) IL DENOMINATORE É DI 1° GRADO:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\left[\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c\right]$$

c) IL DENOMINATORE É DI 2° GRADO:

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx \longrightarrow \text{DIPENDE DA } \begin{array}{l}\Delta > 0\\ \Delta = 0\\ \Delta < 0\end{array}$$

$$(\Delta = b^2-4ac)$$

d) IL DENOMINATORE HA GRADO $> 2 \Rightarrow$ SI SCOMPONE IL DENOMINATORE IN POLINOMI DI GRADO 1 O 2 E SI TORNA A UNO DEI CASI PRECEDENTI.

ESEMPI: 1) $\displaystyle\int \frac{6x^2+8x-8}{x^3+2x^2-4x+3}\,dx =$

- IL NUM. HA GRADO < DEL DENOM.
- VEDIAMO SE IL NUM. É LA DERIVATA DEL DENOM

$$D[x^3+2x^2-4x+3] = 3x^2+2\cdot 2x-4\cdot 1 = 3x^2+4x-4$$

$$= \int \frac{2(3x^2+4x-4)}{x^3+2x^2-4x+3}\,dx = 2\int \frac{3x^2+4x-4}{x^3+2x^2-4x+3}\,dx$$

$$= 2\ln|x^3+2x^2-4x+3| + c$$

2) $$\int \frac{5}{2x-3}\,dx = 5\int \frac{1}{2x-3}\,dx \overset{(b)}{=} 5\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-3|+c$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2}{2x-3}\,dx \overset{(a)}{=} \frac{5}{2}\ln|2x-3|+c$$

3) $$\int \frac{x+5}{x+3}\,dx$$

IL GRADO DEL NUM. É UGUALE A QUELLO DEL DEN.

CASO 1 $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x+5 & x+3 \\ \hline -(x+3) & 1 \\ \hline // \quad 2 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x+5}{x+3}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{x+3}\,dx$$

$$\left[\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx\right]$$

$$= x + 2\int \frac{1}{x+3}\,dx = x + 2\ln|x+3| + c$$

ESERCIZI: RISOLVERE I SEGUENTI:

4) $\int \frac{x^2+1}{\dots}\,dx$

5) $\int \frac{2x+1}{\dots}\,dx$

4) $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$

5) $\int \frac{2x+1}{x-2}\,dx$

6) $\int \frac{x^2-x+3}{3-x}\,dx$

7) $\int \frac{2x^2-3x+4}{2x-3}\,dx$