AVVISO: SETTIMANA PROSSIMA MODIFICA LEZ (VEDI AVVISO ONLINE)

ES. LEZ. SCORSA: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 1$

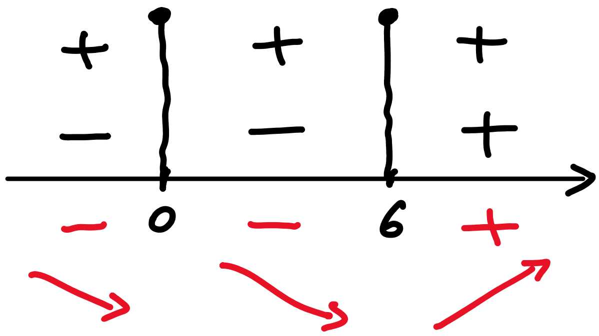
$$y' = \cancel{\frac{1}{4}} \cdot \cancel{4}x^3 - 2 \cdot 3x^2$$

$$= x^3 - 6x^2$$

$y' \geq 0 \iff x^3 - 6x^2 \geq 0$; $x^2(x-6) \geq 0$

F_1: $x^2 \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ ($x^2 = 0$ se $x = 0$)

F_2: $x - 6 \geq 0 \rightarrow x \geq 6$



$\rightarrow$ $x = 0$ É P.TO DI FLESSO ORIZZ.

$x = 6$ É P.TO DI MIN RELATIVO.

OSSERVAZIONE: ABBIAMO (DALL'ESEMPIO SOPRA) CHE NON SEMPRE ESISTE ALMENO UN MAX RELATIVO. ANALOGAMENTE ESISTONO ES. DI FUNZIONI CHE NON HANNO NEANCHE UN MIN RELATIVO. ANCORA, ESISTONO

UN MIN RELATIVO. ANCORA, ESISTONO FUNZIONI CHE HANNO PIÚ DI UN MASSIMO/MINIMO RELATIVI.

DERIVATA SECONDA E CONCAVITÁ.

DATA UNA FUNZIONE $f: D \to \mathbb{R}$, ABBIAMO VISTO CHE LA (FUNZIONE) DERIVATA $f'(x)$ DÁ INFORMAZIONI SULLA FUNZIONE ORIGINALE, IN PARTICOLARE IL SUO SEGNO É LEGATO ALLA CRESCENZA/DECRESCENZA DI f (CFR. TEOREMA DI MONOTONIA) E I PUNTI DI MAX/MIN RELATIVO SONO PARTICOLARI PUNTI STAZIONARI (OSSIA PUNTI $x_0 \in D$ TALI CHE $f'(x_0) = 0$).

SE DELLA FUNZIONE $f'(x)$ NE CALCOLIAMO ULTERIORMENTE LA DERIVATA, ESSA VERRÁ CHIAMATA <u>DERIVATA SECONDA DI f</u> E SARÁ DENOTATA CON

$$f''(x)$$

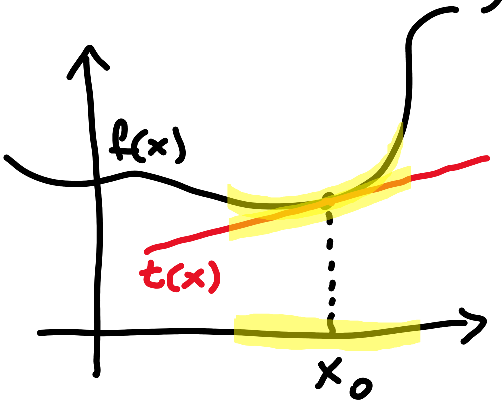
ANCHE LA DERIVATA SECONDA DÁ INFORMAZIONI SU f, MA IN MODO DIVERSO DALLA DERIVATA PRIMA f'.

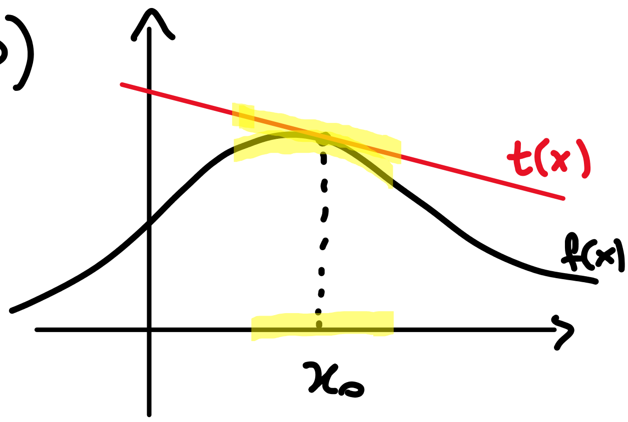
DEF: SIA $f: D \to \mathbb{R}$ DERIVABILE, $x_0 \in D$, E SIA $t(x)$ LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$ NEL PUNTO x_0 ($t(x)$ É UNA RETTA

DI $f(x)$ NEL PUNTO x_0 ($t(x)$ È UNA RETTA CHE PASSA PER x_0 AVENTE COEFF. ANGOLARE $m = f'(x_0)$)

a) SI DICE CHE f IN x_0 HA <u>CONCAVITÀ VERSO L'ALTO</u> SE INTORNO A x_0 IL GRAFICO DI f STA SOPRA $t(x)$, OSSIA $\exists I_\delta(x_0)$ TALE CHE ($x \neq x_0$)

$$f(x) > t(x) \qquad \forall x \in I_\delta(x_0)$$

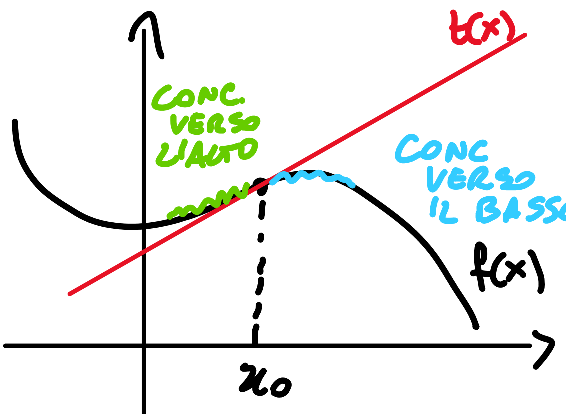


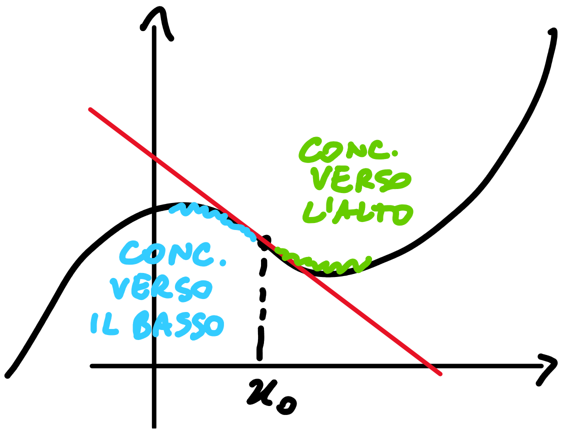
b) 

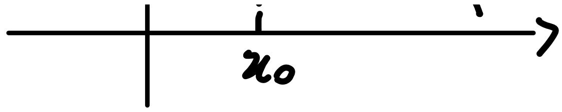
SI DICE CHE f IN x_0 HA <u>CONCAVITÀ VERSO IL BASSO</u> SE INTORNO A x_0 IL GRAFICO DI f STA SOTTO $t(x)$, OSSIA $\exists I_\delta(x_0)$ TALE CHE ($x \neq x_0$)

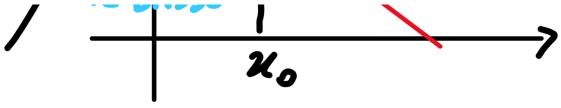
$$f(x) < t(x) \qquad \forall x \in I_\delta(x_0)$$

c) SI DICE CHE f IN x_0 PRESENTI UN FLESSO SE IN TALE PUNTO IL GRAFICO DI $f(x)$ CAMBIA CONCAVITÀ









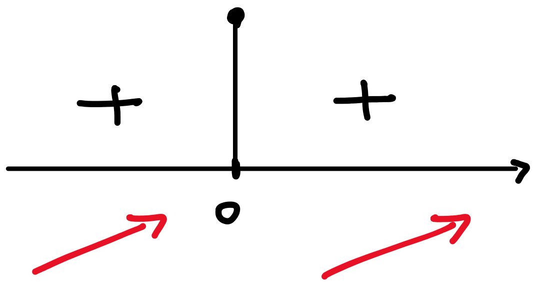
$\boxed{\text{TEOREMA:}}$ SIA $f: D \to \mathbb{R}$ DERIVABILE DUE VOLTE E SIA $x_0 \in D$. SE $f''(x_0) \neq 0$, ALLORA:

1) f HA CONCAVITÀ VERSO L'ALTO IN x_0 SE $f''(x_0) > 0$
2) f HA CONCAVITÀ VERSO IL BASSO IN x_0 SE $f''(x_0) < 0$

ESEMPI: 1) $y = 2x^3 - 5$ STUDIAMONE f', f''.

$$y' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$$

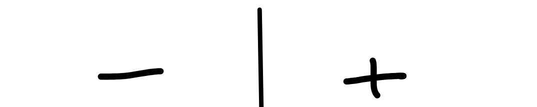
SEGNO DI y': $y' \geq 0 \iff 6x^2 \geq 0$



$\to$ $x = 0$ P.TO DI FLESSO ORIZZ.

$$y'' = 6 \cdot 2x = 12x$$

SEGNO DI y'': $y'' \geq 0 \iff 12x \geq 0 \to x \geq 0$



$\to$ y HA CONCAVITÀ VERSO IL BASSO PER $x < 0$ E VERSO L'ALTO PER $x > 0$.

$x = 0$ È P.TO DI FLESSO.

2) $y = x^3 - 2x^2 + x$

4) $y = \dfrac{x}{x^2 \ldots}$

2) $y = x^3 - 2x^2 + x$

4) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

3) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

5) $y = \ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

3) $$y' = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{(2\cdot 2x)(1-x^2)^2 - (2x^2+2)\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(1-x^2)}\left[4x(1-x^2)+4x(2x^2+2)\right]}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4x-4x^3+8x^3+8x}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{4x^3+12x}{(1-x^2)^3}$$

5) $$y = \ln\left(1-\frac{2}{x}\right) = \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{1\cdot x - (x-2)\cdot 1}{x^2} = \frac{\cancel{x}}{x-2} \cdot \frac{x-x+2}{x^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{x^2-2x}$$

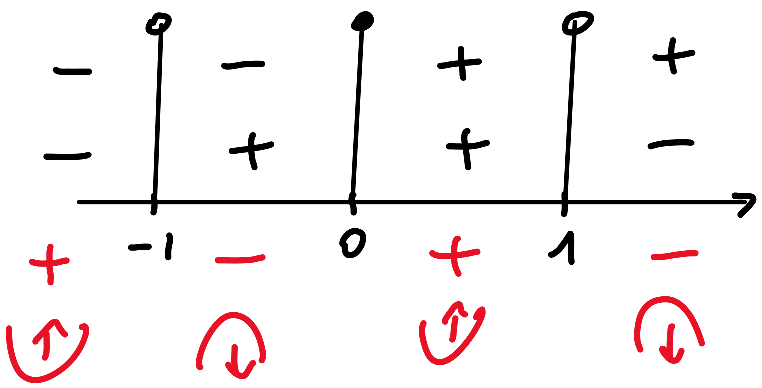
$$y'' = \frac{0\cdot(x^2-2x) - 2(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-2(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = -\frac{4(x-1)}{(x^2-2x)^2}$$

STUDIAMO LA CONCAVITA';

3) $y'' = \dfrac{4x^3+12x}{(1-x^2)^3}$; $\quad y'' \geq 0 \iff \dfrac{4x^3+12x}{(1-x^2)^3} \geq 0$

N: $4x^3+12x \geq 0$; $4x(x^2+3) \geq 0 \xrightarrow[\text{STUDIO DEI FATTORI}]{\text{ES:}} x \geq 0$

D: $(1-x^2)^3 > 0$; $1-x^2>0 \xrightarrow[\text{METODO GRAFICO}]{\text{ES:}} -1<x<1$



$\Rightarrow$ LA y HA CONCAVITÀ VERSO L'ALTO PER $x<-1$, $0<x<1$, INOLTRE $x=0$ È P.TO DI FLESSO.

///

STUDIO DI FUNZIONE (COMPLETO):

1) DOMINIO
2) INTERSEZIONE CON GLI ASSI
3) SEGNO DELLA FUNZIONE
4) LIMITI AGLI ESTREMI (DEL DOMINIO)
5) MASSIMI E MINIMI RELATIVI (NEW)
6) CONCAVITÀ E FLESSI (NEW)

ESEMPI; 1) $y = x^3-2x^2+x$

D: $\mathbb{R}$. INTERSEZIONI; $-$ ASSE $y \rightsquigarrow (x=0)$

$y = 0^3-2\cdot 0^2+0 = 0$

OSSIA IL PUNTO $(0,0)$

$y = 0 - 2\cdot 0 + 0 = 0$

OSSIA IL PUNTO $(0,0)$

- ASSE $x \rightsquigarrow (y=0)$ $\quad 0 = x^3 - 2x^2 + x$;

$x(x^2-2x+1) = 0$; $\quad x(x-1)^2 = 0$

$\rightarrow x = 0$, $x = 1$, OSSIA I P.TI $(0,0)$, $(1,0)$

SEGNO DI f: $\quad y \geq 0 \iff x^3 - 2x^2 + x \geq 0$;

$x(x-1)^2 \geq 0$

F_1: $x \geq 0$

F_2: $(x-1)^2 \geq 0 \longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

	$x<0$	0	$x>0$
(F_1)	$-$		$+$
(F_2)	$+$		$+$
	$-$	0	$+$

LIMITI AGLI ESTREMI : $\quad D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

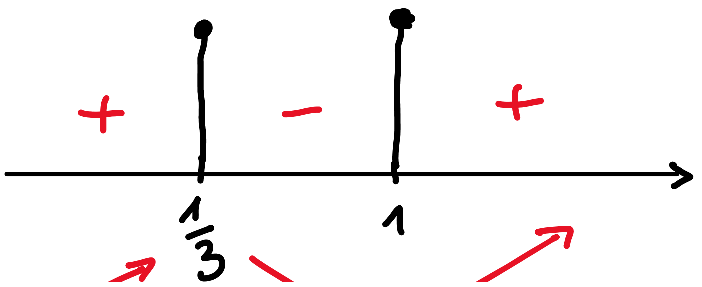
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 2x^2 + x = -\infty - 2\cdot\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 2x^2 + x = +\infty - \infty + \infty = F.I.$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\Big(1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\Big) = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$$

MAX-MIN RELATIVI: $\quad y' = 3x^2 - 4x + 1$

$$y' \geq 0 \iff 3x^2 - 4x + 1 \geq 0 \xrightarrow[\text{METODO GRAFICO}]{\text{ES.}} x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 1$$



$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ É P.TO DI MAX RELATIVO

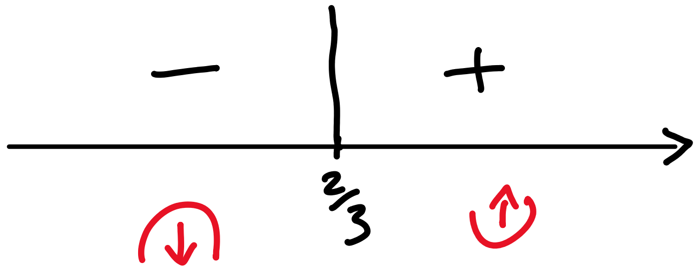
$x = 1$ É P.TO

$\nearrow \ \frac{1}{3} \ \searrow \ 1 \ \nearrow$

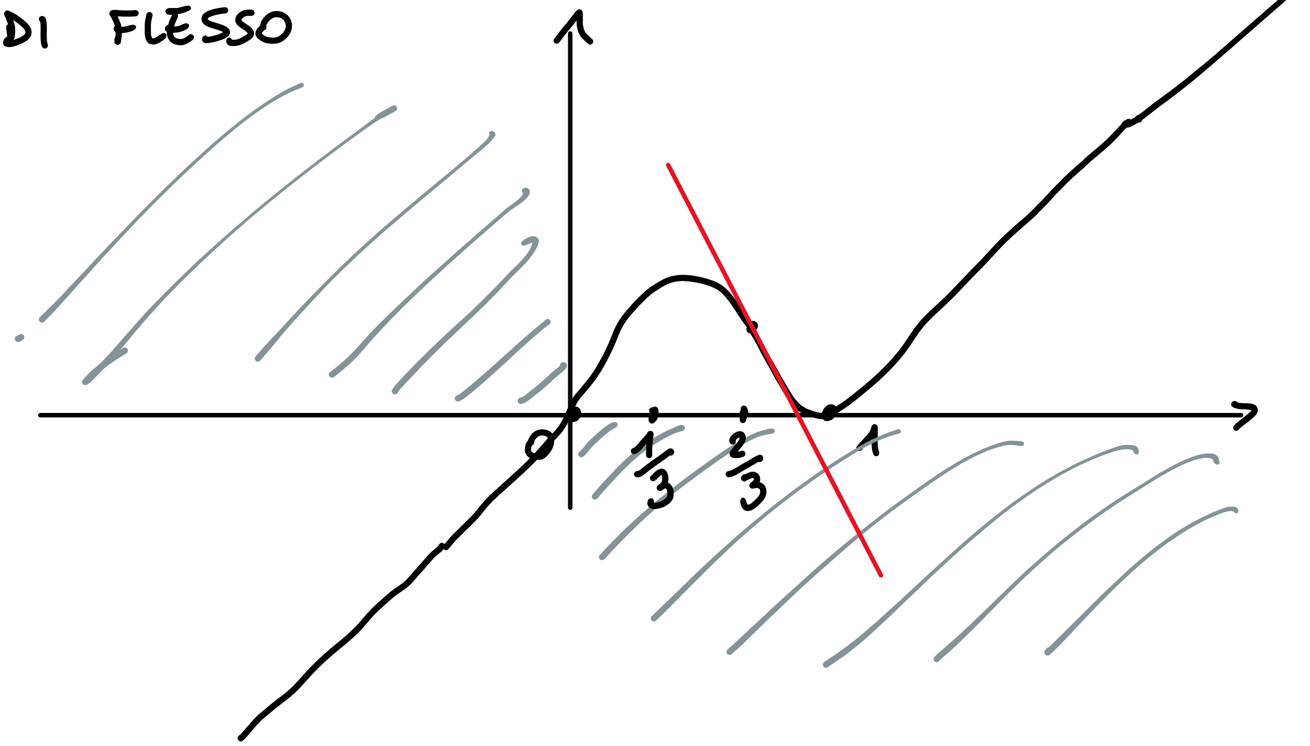
$x = 1$ É P.TO DI MIN RELATIVO

CONCAVITÁ: $y'' = 6x - 4$

$y'' \geqslant 0 \iff 6x - 4 \geqslant 0 \longrightarrow x \geqslant \frac{4}{6}$ OSSIA $x \geqslant \frac{2}{3}$



$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ É P.TO DI FLESSO



ESERCIZI: STUDIARE LE SEGUENTI FUNZIONI E TRACCIARNE IL GRAFICO:

1) $f(x) = x^2 e^x$

2) $f(x) = x - \frac{3}{x+2}$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

$f: y = x^3 - 2x^2 + x$

Inserimento...