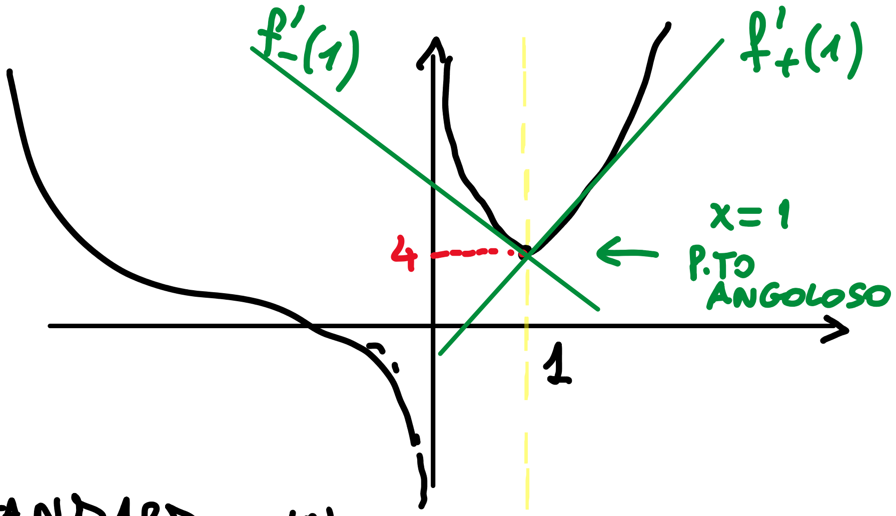
NOTA (FUNZIONI DEF. PER CASI): SI TRATTA DI FUNZIONI CHE HANNO DIVERSE ESPRESSIONI IN BASE AD UNA SUDDIVISIONE DEL DOMINIO

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x} & \text{se } x\leq 1\\ 4x^2 & \text{se } x>1\end{cases}$$




UN ESERCIZIO STANDARD IN QUESTI CASI É VERIFICARE CHE $f$ SIA CONTINUA E/O DERIVABILE NEI PUNTI IN CUI CAMBIA ESPRESSIONE (NEL NOSTRO ES. NEL PUNTO $x=1$)

• $f$ É CONTINUA IN $x=1$? SE LO É, DEVE VALERE

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x} = \frac{1^2+3}{1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\phantom{x}}{x} = \frac{\phantom{x}}{1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4x^2 = 4\cdot 1^2 = 4$$

$$f(1) = \frac{1^2+3}{1} = 4$$

$\Longrightarrow$ f É CONTINUA IN $x=1$.

- f É DERIVABILE IN $x=1$ ?

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x)x-(x^2+3)\cdot 1}{x^2} & \text{se } x<1 \\ 4\cdot(2x) & \text{se } x>1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3}{x^2} & \text{se } x<1 \\ 8x & \text{se } x>1 \end{cases}$$

f É DERIVABILE IN $x=1$ SE VALE

$$f'_-(1) = f'_+(1)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3}{x^2} = \frac{1^2-3}{1^2} = -2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} 8x = 8\cdot 1 = 8$$

---

TEOREMA: SIA $f: D \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE.
SE f É DERIVABILE IN $x_0 \in D \Longrightarrow$

SE $f$ É DERIVABILE IN $x_0 \in D \Rightarrow$
$f$ É CONTINUA IN $x_0$.

DIMOSTRAZIONE:

VOGLIAMO VEDERE CHE $f$ É CONTINUA IN $x_0$,
OSSIA
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

CHE É EQUIVALENTE A
$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

A SUA VOLTA UGUALE A DIRE
$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$$

$f'(x_0)$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

$\square$

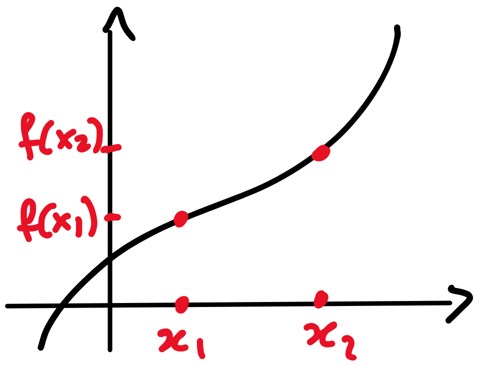
---

DEF: SIA $f: D \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE. DIREMO:

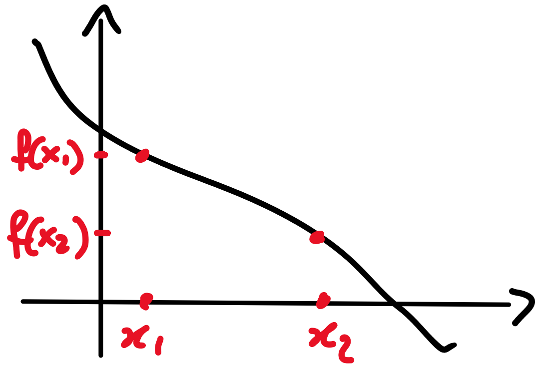
- $f$ É **CRESCENTE** SE
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$
$\forall x_1, x_2 \in D$

- $f$ É **DECRESCENTE** SE

$x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1)$




F. CRESCENTE




F. DECRESCENTE

Es: $y = 3x$ É CRESCENTE, $y = 2 - x$ NO.
(ESERCIZIO: DISEGNATELE)

<u>TEOREMA</u> (DI MONOTONIA): Sia $f(x)$ UNA FUNZIONE DERIVABILE SU UN INTERVALLO $[a, b]$. ALLORA:

- $f$ É CRESCENTE IN $[a,b] \iff f' \geq 0$ OVVERO LA SUA DERIVATA É POSITIVA

- $f$ É DECRESCENTE IN $[a,b] \iff f' \leq 0$ OVVERO LA SUA DERIVATA É NEGATIVA.

ESEMPI: (ES. PRECEDENTE)

1) $y = 3x$ HA DERIVATA $y' = 3$ POSITIVA
$\implies$ É CRESCENTE;
$y = 2 - x$ HA DERIVATA $y' = -1$ NEGATIVA
$\implies$ É DECRESCENTE.

2) STABILIAMO QUANDO É CRESCENTE / DECRESC. LA FUNZIONE $f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$

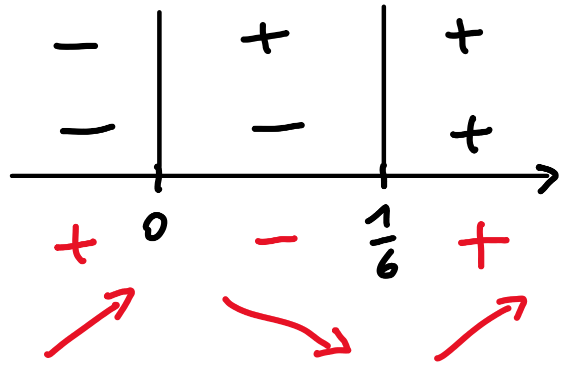
$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 2x$$
$$= 12x^2 - 2x$$

STUDIAMO IL SEGNO DI $f'(x)$. QUANDO SARÁ POSITIVO, LA FUNZIONE SARÁ CRESCENTE (NEGLI ALTRI CASI DECRESCENTE)

$$f'(x) \geq 0 \iff 12x^2 - 2x \geq 0$$
$$2x(6x-1) \geq 0$$

$F_1$: $2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

$F_2$: $6x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{6}$




$\Rightarrow$ f É:

- CRESCENTE PER $x \in (-\infty, 0]$
- DECRESCENTE PER $x \in [0, \frac{1}{6}]$
- CRESCENTE PER $x \in [\frac{1}{6}, +\infty)$

DEF: SIA $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE.

a) SI DICE CHE UN P.TO $x_0 \in D$ É <u>P.TO DI MINIMO RELATIVO</u> SE $\exists I_\delta(x_0)$ TALE CHE $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in I_\delta(x_0)$

TALE CHE $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$

b) SI DICE CHE UN P.TO $x_0 \in D$ É <u>P.TO DI MASSIMO RELATIVO</u> SE $\exists I_\delta(x_0)$ TALE CHE $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$

IN PARTICOLARE, SE $f$ É DERIVABILE CI ASPETTIAMO CHE

a) SE $x_0$ É P.TO DI MIN. REL., LA FUNZIONE PRIMA DI $x_0$ DECRESCA E DOPO $x_0$ CRESCA

b) SE $x_0$ É P.TO DI MAX. REL., LA FUNZIONE PRIMA DI $x_0$ CRESCA POI DOPO $x_0$ DECRESCA.

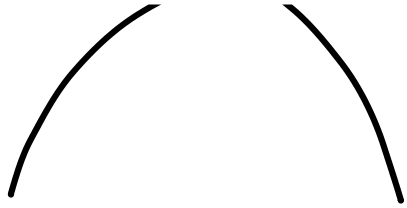
NELL' ES. PRECEDENTE, $x_0 = 0$. ERA MAX. REL. E $x_0 = \frac{1}{6}$ ERA MIN. REL.

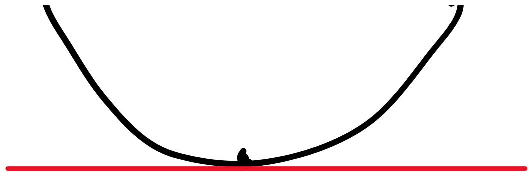
PER IL TEOREMA DI MONOTONÌA SI HA

**TEOREMA DI FERMAT**; SIA $f: D \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DERIVABILE IN $x_0 \in D$. SE $x_0$ É P.TO DI MAX O MIN RELATIVO, ALLORA

$$f'(x_0) = 0$$

(SI DICE CHE $x_0$ É UN « P.TO STAZIONARIO »)





DIMOSTRAZIONE: FACCIAMO VEDERE CHE $f'(x_0)=0$ MOSTRANDO CHE $f'_-(x_0) = 0 = f'_+(x_0)$

SUPP. $x_0$ P.TO DI MAX RELATIVO.

POICHÉ $f$ É CRESCENTE PRIMA DI $x_0$,

$$f'_-(x_0) \geq 0$$

POICHÉ $f$ É DECRESCENTE DOPO $x_0$,

$$f'_+(x_0) \leq 0$$

POICHÉ $f$ E' DERIVABILE IN $x_0$, LE 2 DERIVATE (DESTRA E SINISTRA) COINCIDONO, OSSIA

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0 .$$

$\square$

ESEMPI: 1) $y = 4x^3 - x^2 + 1$ (ES. PRECED.)

$$y' = 12x^2 - 2x$$

$y' = 0 \iff x = 0, \quad x = \frac{1}{6}$ SONO I P.TI STAZIONARI PER $y$

2) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 1$ QUALI SONO I P.TI STAZ.?

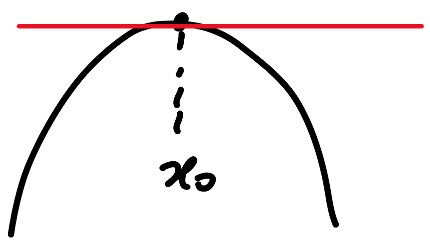
2) $y = \dfrac{\;\;}{4} \dots$

$$y' = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} x^3 - 2 \cdot 3x^2 = x^3 - 6x^2$$

$$y' = 0 \iff x^3 - 6x^2 = 0$$

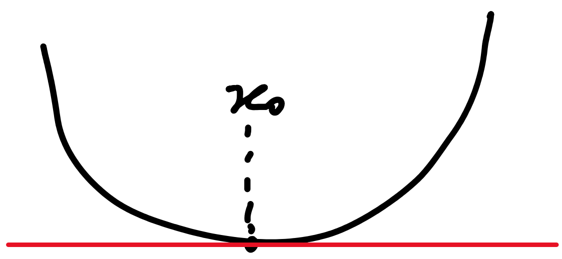
$$x^2(x-6) = 0 \longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 6 \end{matrix}$$

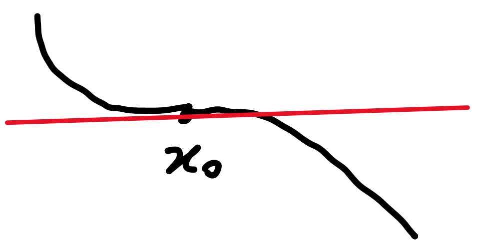
OSSERVAZIONE: SI POSSONO VERIFICARE 4 CASI DI PUNTI STAZIONARI:

1) 


LA FUNZIONE É PRIMA CRESCENTE $(f'_-(x_0) > 0)$ E DOPO DECRESCENTE $(f'_+(x_0) < 0) \Rightarrow$ P.TO DI MAX RELATIVO

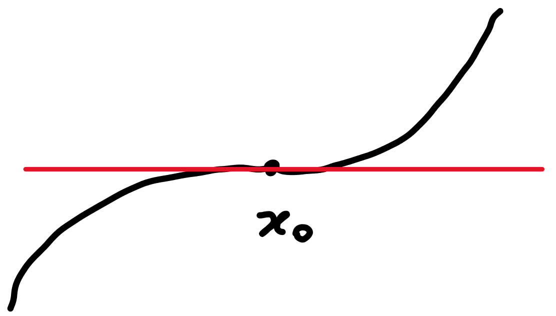
2) LA FUNZIONE É PRIMA DECRESCENTE $(f'_-(x_0) < 0)$ E DOPO CRESCENTE $(f'_+(x_0) > 0) \Rightarrow$ P.TO DI MIN RELATIVO




3) 


LA FUNZIONE É PRIMA DECRESCENTE $(f'_-(x_0) < 0)$ E DOPO NUOVAMENTE DECRESCENTE $(f'_+(x_0) < 0)$ $\Rightarrow$ P.TO DI FLESSO ORIZZONTALE

4) LA FUNZIONE É PRIMA CRESCENTE $(f'_-(x_0)>0)$ E DOPO NUOVAMENTE CRESCENTE $(f'_+(x_0)>0)$
$\Rightarrow$ P.TO DI FLESSO ORIZZONTALE




ESEMPI: (STUDIARE MAX/MIN RELATIVI DELLE SEGUENTI FUNZIONI)

1) $f(x)=x^3-4x \longrightarrow f'(x)=3x^2-4\cdot 1=3x^2-4$

$f'(x)\geq 0 \iff 3x^2-4\geq 0$ ;

(METODO GRAFICO PER LA DISEQ. DI II GRADO)

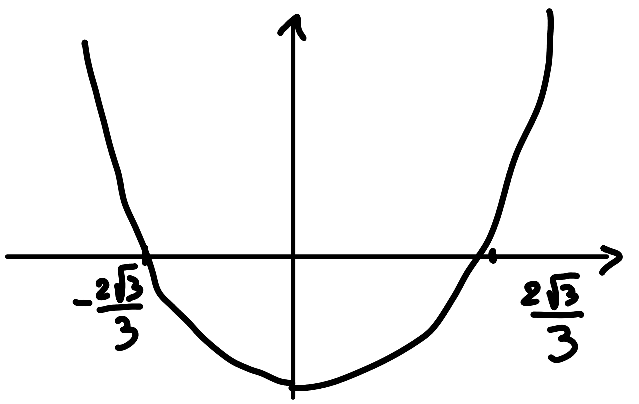
$y=3x^2-4$ - CONCAVITÁ VERSO L'ALTO
- INTERSEZIONI CON L'ASSE X :

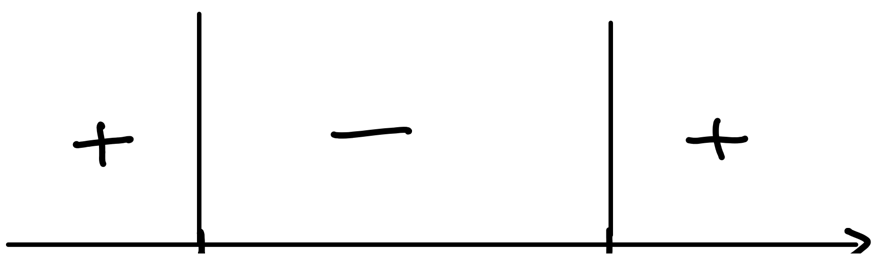
$$x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2+48}}{2\cdot 3}=\frac{\pm 4\sqrt{3}}{6}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

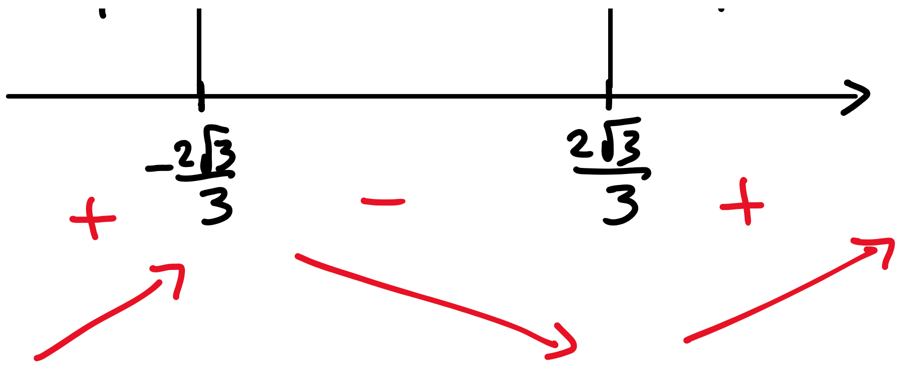
$\Rightarrow 3x^2-4\geq 0$

PER $x\leq -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\vee$

$x\geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$






I P.TI STAZIONARI SONO $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

IN PARTICOLARE: $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ É MAX RELATIVO

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ É MIN RELATIVO.

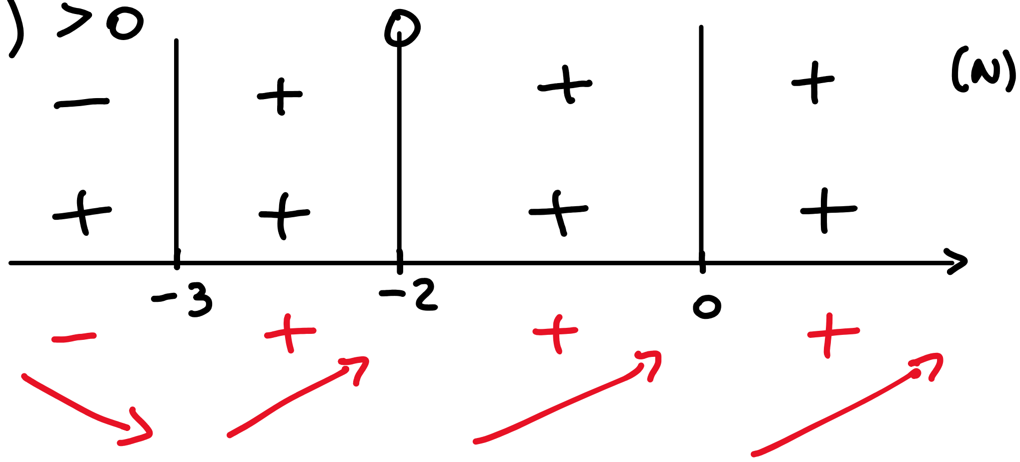
2) $y = \frac{2x^3}{x+2}$ $\quad (D: \mathbb{R} \setminus \{-2\})$

$$y' = \frac{(2 \cdot 3x^2)(x+2) - 2x^3 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{6x^3 + 12x^2 - 2x^3}{(x+2)^2} = \frac{4x^3+12x^2}{(x+2)^2}$$

$$y' \geq 0 \iff \frac{4x^3+12x^2}{(x+2)^2} \geq 0$$

$N \geq 0$: $\quad 4x^3 + 12x^2 \geq 0 \quad ; \quad 4x^2(x+3) \geq 0$

$D > 0$: $\quad (x+2)^2 > 0$




→ I P.TI STAZIONARI SONO $x = -3$ E $x = 0$.

IN PARTICOLARE $x = -3$ É P.TO DI MIN REL

→ I P.TI STAZIONARI SONO $x=-3$ E $x=0$.

IN PARTICOLARE, $x=-3$ É P.TO DI MIN REL

$x=0$ É P.TO DI FLESSO ORIZZ.

ESERCIZIO: 3) $y=\frac{x^4}{4}-2x^3+1$.

$f : y = 4x^3 - x^2 + 1$

Inserimento...