LE DERIVATE POSSONO ESSERE USATE PER RISOLVERE LIMITI CHE PRESENTANO F.I. DEL TIPO $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, COME MOSTRA IL:

$\boxed{\text{TEOREMA DI DE L'HOSPITAL:}}$ SIANO $f(x)$, $g(x)$ DUE FUNZIONI CONTINUE IN UN PUNTO x_0 E TALI CHE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{OPPURE} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

SE
i) $f(x)$, $g(x)$ SONO DERIVABILI IN UN INTORNO DI x_0 $(I \setminus \{x_0\})$
ii) $g'(x_0) \neq 0$ IN TALE INTORNO $(I \setminus \{x_0\})$
iii) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

TALE RISULTATO VALE ANCHE NEL CASO $x_0 \to \infty$.

ESEMPI: 1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2-4}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

$$\to \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2-4}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D[4x^2-4]}{D[\ln x]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+3}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D[e^{x+3}]}{D[x]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+3} \cdot (1)}{1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+3}}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

3) $$\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 9x + 6}{5x^5 + 2x^4 - 33x + 26}$$

4) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x}$$

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

6) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

7) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^3}$$

8) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \ln x}{7x - 2}$$

9) $$\lim_{x \to 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln(x^2 - 9)}$$

4) $$\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 1}{\cos^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{1 - 1}{0^2} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{-2 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-2\left((-\sin x)\sin x + \cos x \cdot \cos x\right)}$$

$$x \to \frac{\pi}{2} \quad -2\left((-\sin x)\sin x + \cos x \cdot \cos x\right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\left(\cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2(0-1)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

7) $$\lim_{x \to 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln(x^2-9)} = \frac{\ln(0)}{\ln(0)} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{x \to 3^+} \frac{\frac{1}{x-3} \cdot 1}{\frac{1}{x^2-9} \cdot 2x} = \lim_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{x-3}\right) \cdot \frac{x^2-9}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{2x(x-3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{2x\cancel{(x-3)}} =$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{2x} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\left[= \lim_{x \to 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln((x-3)(x+3))} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\ln(x-3)}{\ln(x-3) + \ln(x+3)} \right.$$

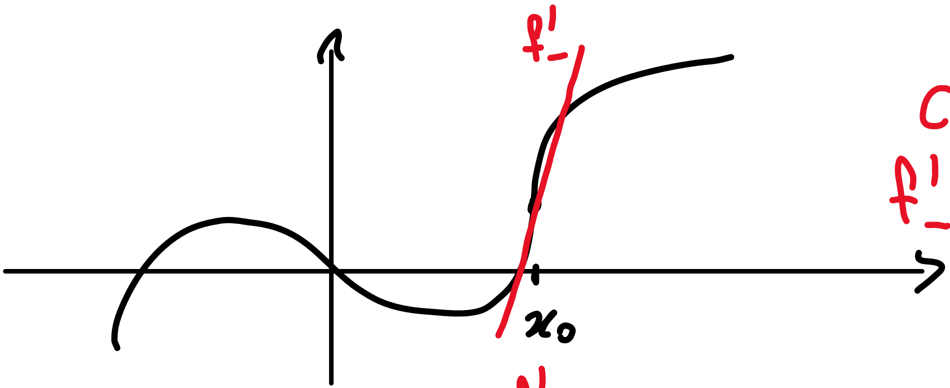
$$\left. = \frac{-\infty}{-\infty + \ln 6} = \frac{-\infty}{-\infty} \right]$$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ: ANALOGAMENTE AI CASI DI DISCONTINUITÀ, POSSIAMO CLASSIFICARE I PUNTI $x_0 \in D$ IN CUI $\nexists f'(x_0)$ (RICORDIAMO CHE PER ESISTERE $f'(x_0)$ DEVONO ESSERE FINITI E COINCIDERE $f'_+(x_0)$ ED $f'_-(x_0)$). SE PENSIAMO A $f'(x)$ COME UNA FUNZIONE, SI OTTENGONO 3 CASI:

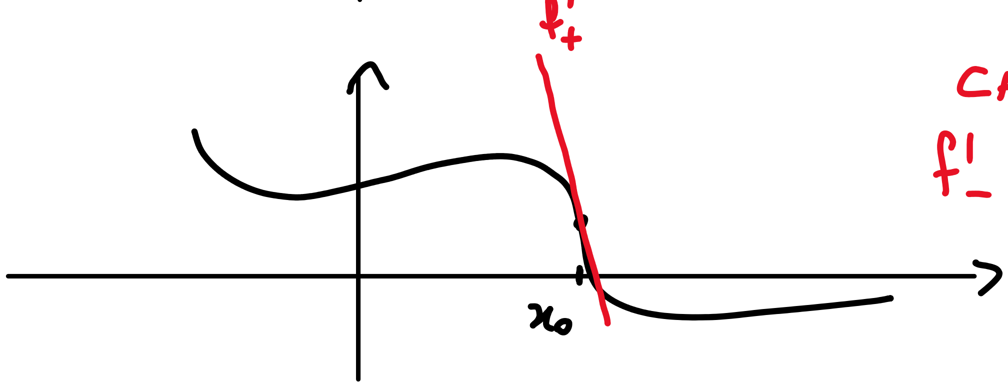
1) FLESSO A TG VERTICALE:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x) = \pm\infty$$

(ENTRAMBI $+\infty$ O ENTRAMBI $-\infty$)



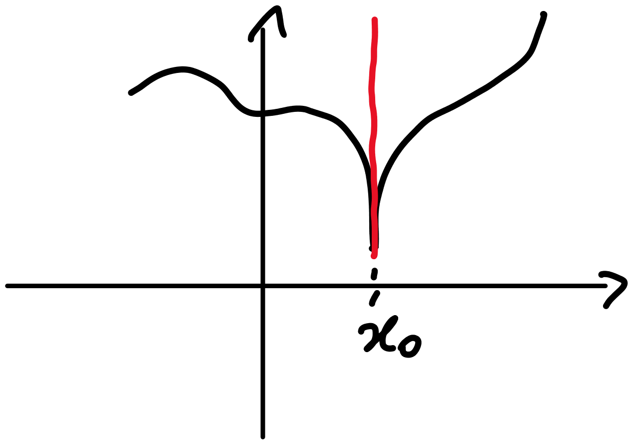
CASO $f'_- = f'_+ = +\infty$



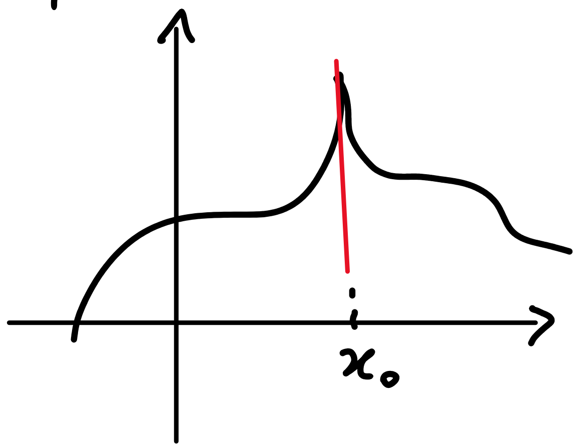
CASO $f'_- = f'_+ = -\infty$

2) CUSPIDI: UNO DEI DUE TRA $f'_+(x_0)$

2) CUSPIDI : UNO DEI DUE TRA $f'_+(x_0)$ ED $f'_-(x_0)$ VALE $+\infty$, L'ALTRO $-\infty$.

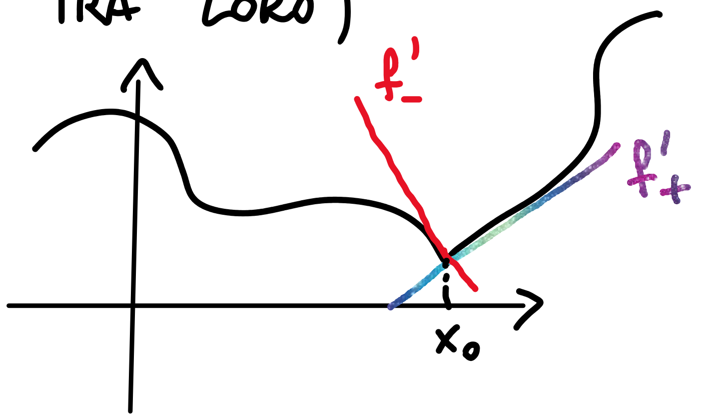


CASO $f'_-(x_0) = -\infty$
$f'_+(x_0) = +\infty$



CASO $f'_-(x_0) = +\infty$
$f'_+(x_0) = -\infty$

3) PUNTI ANGOLOSI ; UNO TRA $f'_+(x_0)$ ED $f'_-(x_0)$ O ENTRAMBI SONO FINITI (DIVERSI TRA LORO)



CASO $f'_-(x_0) = \ell_1$
$f'_+(x_0) = \ell_2$

ESEMPI (STUDI DI FUNZIONE)

1) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2} e^{-x}$

DOMINIO : (C.E: $x^2 \neq 0$ $\downarrow$ $x \neq 0$)

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

INTERSEZIONI: - CON L'ASSE y NON POSSONO ESSERCENE $(0 \notin D)$

- CON L'ASSE x: $0 = \frac{x^2+1}{x^2} e^{-x}$

$$\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2}}_{F_1} \underbrace{e^{-x}}_{F_2} = 0 \longrightarrow \frac{x^2+1}{x^2} = 0 \quad \vee \quad \cancel{e^{-x} = 0}$$

IMPOSSIBILE

$$\frac{x^2+1}{x^2} = 0 \longrightarrow x^2+1 = 0 \longrightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1}}{2}$$

$$\cancel{= \frac{\pm\sqrt{-4}}{2}}$$

IMPOSSIBILE

SEGNO DELLA FUNZIONE:

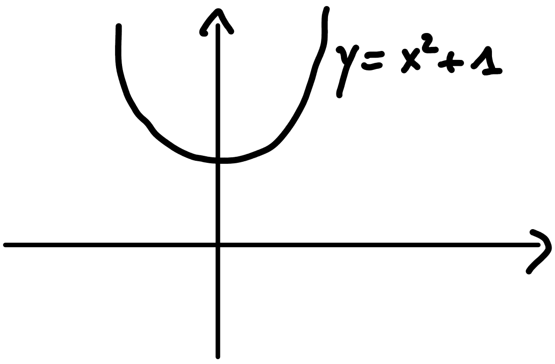
$y > 0$ QUANDO $\frac{x^2+1}{x^2} e^{-x} > 0$ $(\longrightarrow$ SEMPRE$)$

$x^2+1 > 0 \longrightarrow$ METODO GRAFICO: $y = x^2+1$

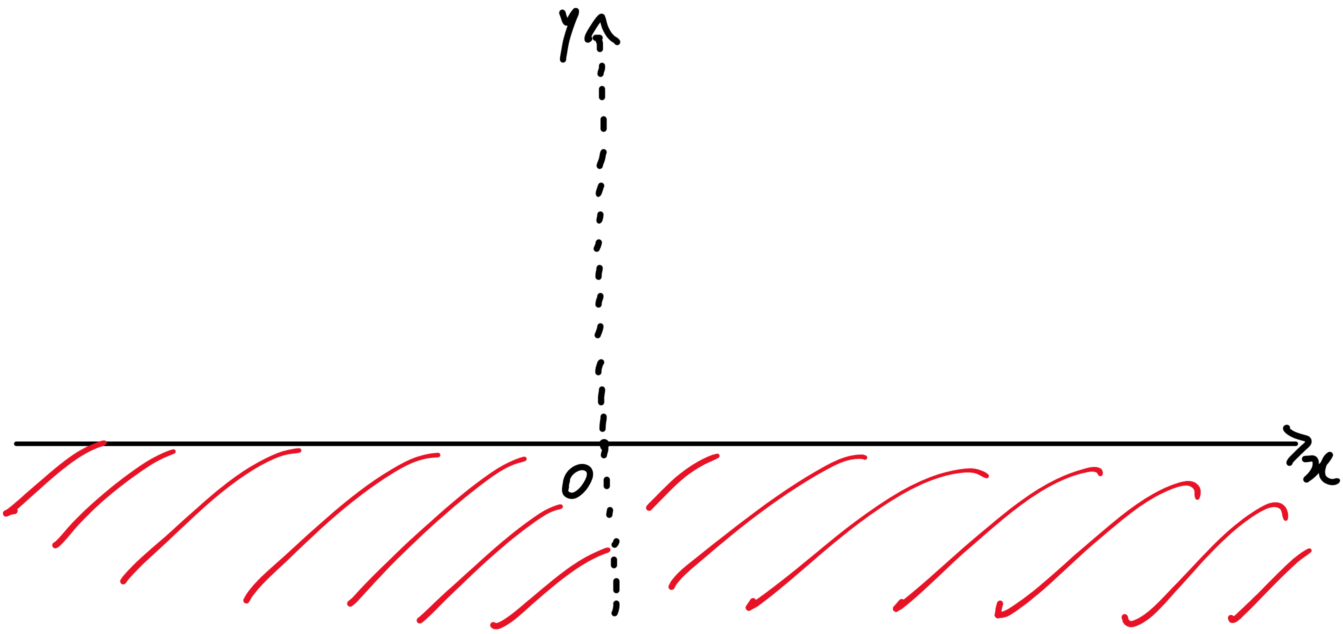
È UNA PARABOLA CON:
- CONCAVITÀ VERSO L'ALTO
- NESSUNA INTERS. ASSE X

$x^2 > 0 \longrightarrow$ ES.

$e^{-x} > 0 \longrightarrow$ ES.



$\Rightarrow \quad x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

CALCOLIAMO I LIMITI AGLI ESTREMI

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2} e^{-x} = \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2}\right)\left(\lim_{x \to -\infty} e^{-x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}}\right)\left(\lim_{x \to -\infty} e^{-x}\right)$$

$$= 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

- $$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x^2} e^{-x} = \left(\lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}}\right)\left(\lim_{x \to 0^-} e^{-x}\right)$$

$$= +\infty \cdot 1 = +\infty \quad \longrightarrow \quad x=0 \text{ ASINTOTO VERTICALE (SINISTRO)}$$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x^2} e^{-x} = \text{ESERCIZIO}$$

$\cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} e^{-x} \underset{\uparrow \text{ES.}}{=} 0 \longrightarrow y=0$ ASINTOTO ORIZZONTALE (DESTRO)

PER ULTIMO, CALCOLIAMO y':

$$y = \frac{x^2+1}{x^2} e^{-x} \longrightarrow y' = D\left[\frac{x^2+1}{x^2}\right] e^{-x} + \frac{x^2+1}{x^2} D\left[e^{-x}\right]$$

$$= \frac{(2x)x^2 - (x^2+1)(2x)}{x^4} e^{-x} + \frac{x^2+1}{x^2} \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} - 2x}{x^4} e^{-x} - \frac{x^2+1}{x^2} e^{-x}$$

$$= -\frac{2}{x^3} e^{-x} - \frac{x^2+1}{x^2} e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{x^2}\left(\frac{2}{x} + x^2 + 1\right)$$

ESERCIZI : STUDIARE LE FUNZIONI

$$y = \frac{\ln^2(x) - 1}{\ln^2(x) + 1} \qquad y = e^x \sqrt{x(x-1)}$$