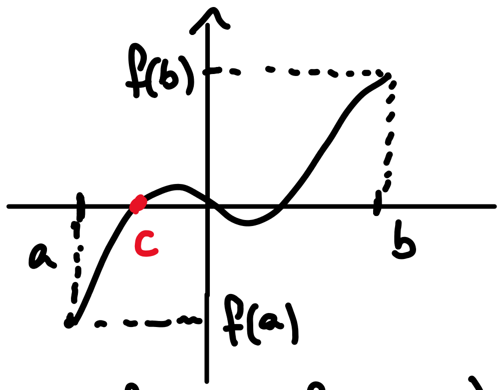
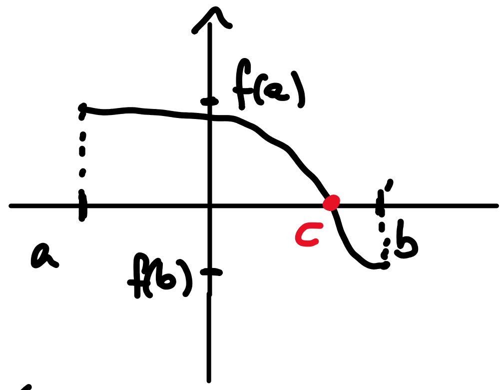
PREMESSA: <u>TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI</u>.

SIA $[a,b]$ UN INTERVALLO, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA. SE $f(a)$ ED $f(b)$ SONO DISCORDI (OSSIA UNO DEI DUE È POSITIVO E L'ALTRO NEGATIVO), ALLORA

$\exists c\in[a,b]$ T.C. $f(c)=0$.

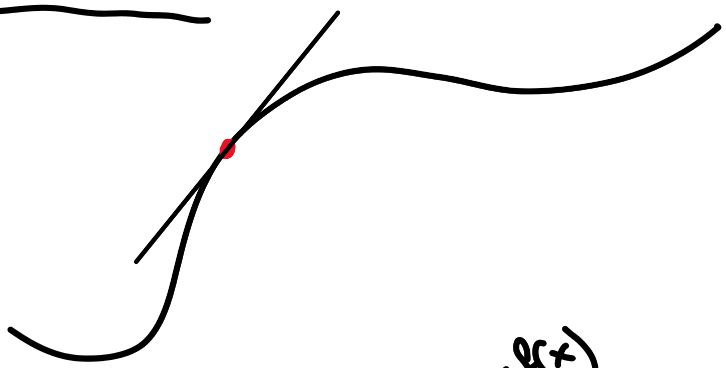


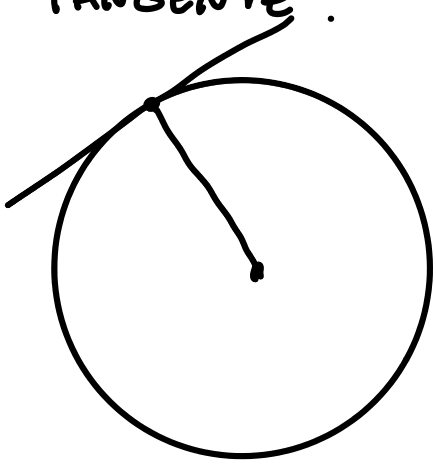
(CASO $f(a)<0$, $f(b)>0$)

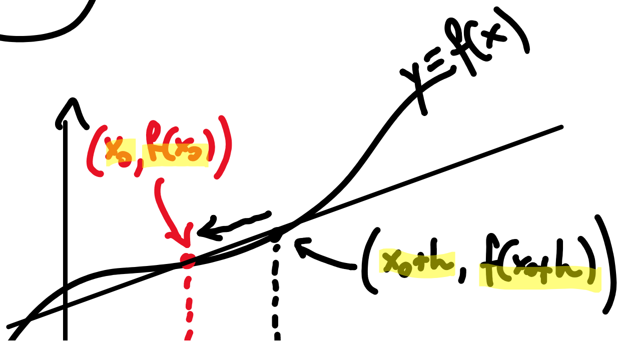


(CASO $f(a)>0$, $f(b)<0$)

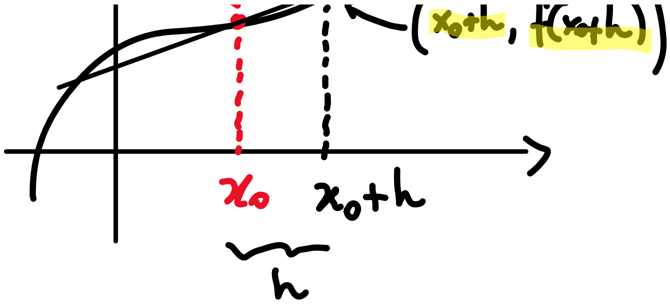
<u>DERIVATE</u>. PROBLEMA DELLA TANGENTE.







VOGLIAMO DETERMINARE, SE ESISTE, COS'È UNA RETTA TANGENTE IN UN PUNTO



TANGENTE IN UN PUNTO x_0 AL GRAFICO DI f.

PER FARE CIÓ, PRENDIAMO UN ALTRO PUNTO A DISTANZA h DA x_0 (OSSIA IL PUNTO x_0+h) E TROVIAMO L'EQ DELLA RETTA PER x_0 E x_0+h. DIREMO CHE LA RETTA TANGENTE É L'UNICA RETTA CHE PASSA PER x_0 CON COEFFICIENTE ANGOLARE CHE DETERMINIAMO COME SEGUE.

LA RETTA PER x_0, x_0+h HA COEFF. ANGOLARE DATO DA

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_p - y_q}{x_p - y_q}$$

CHE NEL NOSTRO CASO DIVENTA

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

QUESTO <u>RAPPORTO</u> É CHIAMATO <u>INCREMENTALE</u>.

DEF: LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE f IN UN PUNTO x_0 É LA RETTA (PER x_0) CON COEFF. ANGOLARE

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(SE IL LIMITE ESISTE). ESSO É DETTO DERIVATA DI f IN x_0, E SI DENOTA CON $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $Df(x_0)$.

SE f AMMETTE DERIVATA IN x_0 (OSSIA ESISTE $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$), f SI DICE ESSERE <u>DERIVABILE IN x_0</u>. SE f AMMETTE DERIVATA $f'(x_0)$, $\forall x_0 \in D$, f SI DICE ESSERE <u>DERIVABILE</u>.

ESEMPI: 1) $y = x^2 - x$, $x_0 = 3$

$$f'(3) = y'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(3+h)^2 - (3+h)] - [3^2 - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[\cancel{9} + h^2 + 6h \cancel{-3} - h] \cancel{-6}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+5)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (h+5) = 5$$

2) $f(x) = 4x^2$ CALCOLIAMONE LA DERIVATA IN UN PUNTO GENERICO x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4(x^2+h^2+2xh)-4x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4x^2}+4h^2+8xh\cancel{-4x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+8xh}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(4h+8x)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(4h+8x) =$$

$$= 8X$$

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $f'(5) = 40$.

<u>NOTA</u>: ESSENDO LA DERIVATA UN LIMITE, HA SENSO PARLARE DI:

- DERIVATA DESTRA: $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- DERIVATA SINISTRA: $f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

f È DERIVABILE IN x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists$ ENTRAMBI $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = l < \infty$

ESEMPIO (DERIVATA DI UNA RETTA):

$y = mx + q$ (CI ASPETTIAMO $y' = m$)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[m(x+h)+q]-[mx+q]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{mx} + mh + \cancel{q} - \cancel{mx} - \cancel{q}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m\cancel{h}}{\cancel{h}} = m$$

DERIVATE FONDAMENTALI:

a) $f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0$

NON È F. I.

$$\left[\, f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \,\right]$$

b) $f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$

ESERCIZIO: VERIFICA.

c) $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

$$\left[\, f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\cancel{x^n} + n x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n\right] - \cancel{x^n}}{h}$$

$$\left. = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}} = n x^{n-1} \,\right]$$

d) $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

e) $f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = -\sin x$

f) $f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \underbrace{\ln a}_{\in \mathbb{R}}$

È UN NUMERO!

CASO PARTICOLARE: $a = e$

$f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x \cdot \overbrace{\ln e}^{=1} = e^x$

$$f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x\cdot \ln e = e^x$$

$$g)\quad f(x)=\log_a x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\cdot \underbrace{\log_a e}_{\in\mathbb{R}}$$

CASO PARTICOLARE: $a=e$

$$f(x)=\ln x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\cdot \underbrace{\ln e}_{=1}=\frac{1}{x}$$

PROPRIETÀ DELLE DERIVATE:

i) $D[k\cdot f(x)] = k\cdot Df(x)$ $\quad (k\in\mathbb{R}$ cost.$)$

ii) $D[f(x)+g(x)] = D[f(x)]+D[g(x)]$

iii) $D[f(x)\cdot g(x)] = [Df(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot [Dg(x)]$

ESEMPI: 1) $y=\frac{2}{3}\cos x$

$$D\left[\frac{2}{3}\cos x\right] \overset{(i)}{=} \frac{2}{3}D[\cos x] \overset{(e)}{=} \frac{2}{3}\cdot(-\sin x)$$
$$= -\frac{2}{3}\sin x$$

2) $y = x + 2\,\text{sen}\,x$

$$D[x+2\,\text{sen}\,x] \overset{(ii)}{=} D[x]+D[2\,\text{sen}\,x] \overset{(b)}{\underset{(i)}{=}} 1+2D[\text{sen}\,x]$$
$$\overset{(d)}{=} 1+2\cos x$$

3) $y = 2e^x - 3\cos x + 1 \longrightarrow y' = 2e^x + 3\sin x$

4) $y = x\cdot\sin x$

4) $y = x \cdot \sin x$

$$D[\underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g}] = \underbrace{1 \cdot \sin x}_{f' \cdot g} + \underbrace{x \cdot \cos x}_{f \cdot g'}$$

5) $y = 4x^2 \cdot e^x \longrightarrow y' = 4 \cdot 2x \cdot e^x + 4x^2 e^x$

$$= 8xe^x + 4x^2 e^x$$

$$= 4xe^x (2 + x)$$

iv) $$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'g - fg'}{[g(x)]^2}$$

Es: 1) $y = \dfrac{x}{e^x} \longrightarrow y' \underset{(iv)}{=} \dfrac{1 \cdot e^x - x e^x}{(e^x)^2}$

$$= \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{e^{\cancel{2}x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

2) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} \longrightarrow y' \underset{(iv)}{=} \dfrac{D[3x^2-1] \cdot (x^2+1) - (3x^2-1) D[x^2+1]}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{(3 \cdot 2x)(x^2+1) - (3x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{6x^3} + 6x - \cancel{6x^3} - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2} .$$

3) $y = tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow y' \underset{(iv)}{=} \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$\dots) \ y = \dots \quad \cos x \qquad \dots \ \text{(int)} \quad (\cos x)^2$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

v) (FUNZIONE COMPOSTA) $D[f(g(x))] = f' \cdot g'$

ESEMPI:

1) $y = \underbrace{\ln(\underbrace{x^2+2}_{g(x)})}_{f(g(x))} \longrightarrow y' = \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2+2}}}_{f'} \cdot \underbrace{\boxed{2x}}_{g'}$

2) $y = e^{x^2} \longrightarrow y' = e^{x^2} \cdot 2x$

3) $y = \sin(3+x) \longrightarrow y' = \cos(3+x) \cdot 1$
$= \cos(3+x)$

NOTA: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ESERCIZI: CALCOLARE LA DERIVATA DELLE SEGUENTI FUNZIONI:

a) $y = \frac{2}{(x^3+2)^2}$, b) $y = \ln(x^4 - 3x^2)$

c) $y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{tg}(x^2-1)$ d) $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

c) $y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{tg}(x^2 - 1)$

d) $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$