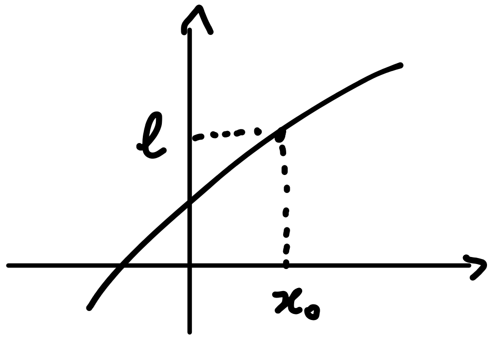
29/11/2023

venerdì 24 novembre 2023 12:43

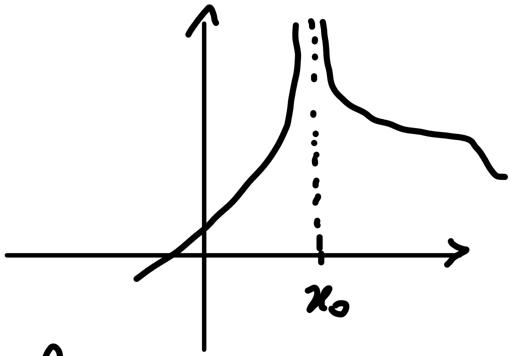
LIMITI VISTI FINORA E LORO "GRAFICI":

1



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

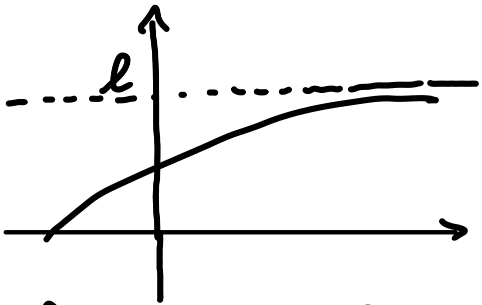
2



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

ASINTOTO VERTICALE
(RETTA $x = x_0$)

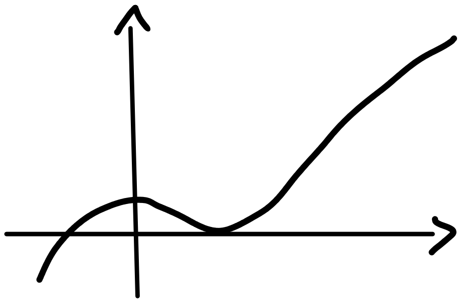
3



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

ASINTOTO ORIZZONTALE
(RETTA $y = \ell$)

4



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

NOTA (CASO 3): A DIFFERENZA DELL'ASINTOTO VERT., LA FUNZIONE PUÓ "TOCCARE" UN ASINTOTO ORIZZONTALE.

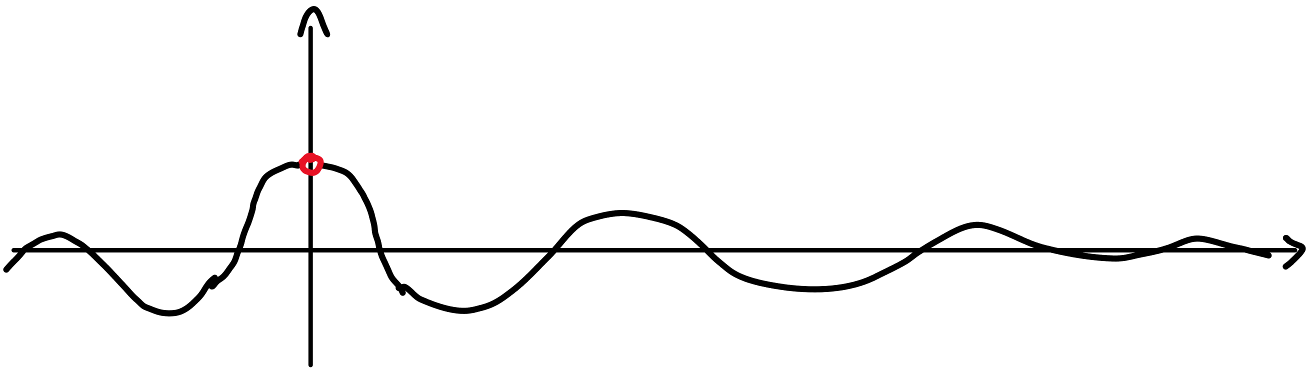
Es: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

(PER IL TEO. DEL CONFRONTO, INFATTI

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \overset{x \to +\infty}{\Longrightarrow} \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-1 \le \sin x \le 1 \quad \overset{x \to +\infty}{\Longrightarrow} \quad -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

E $\displaystyle\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.)



$y=0$ É ASINTOTO ORIZZ. MA VIENE INTERSECATO INFINITE VOLTE DA $f(x)$ (QUESTO <u>NON</u> É VIETATO).

ALTRI LIMITI NOTEVOLI:

3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ($e \approx 2{,}71$ É LA COST. DI NEPERO)

4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

5) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ESERCIZIO: DIMOSTRARLI A PARTIRE DA (3)

ESEMPIO: STUDIAMO LA FUNZIONE $f(x) = \dfrac{x-1}{8x^2+7x}$

- DOMINIO: VALGONO C.E: $8x^2+7x \neq 0$

  $x(8x+7) \neq 0$

OSSIA $x \neq 0 \quad \lor \quad 8x+7 \neq 0$

$x \neq 0 \quad \lor \quad x \neq -\frac{7}{8}$

QUINDI IL DOMINIO DI f É $\mathbb{R} \setminus \left\{0, -\frac{7}{8}\right\}$

• INTERSEZIONI: – CON L'ASSE y → NON POSSO PERCHÉ $0 \notin D$

– CON L'ASSE x → $0 = \frac{x-1}{8x^2+7x}$

→ $x-1=0$ OSSIA $x=1$

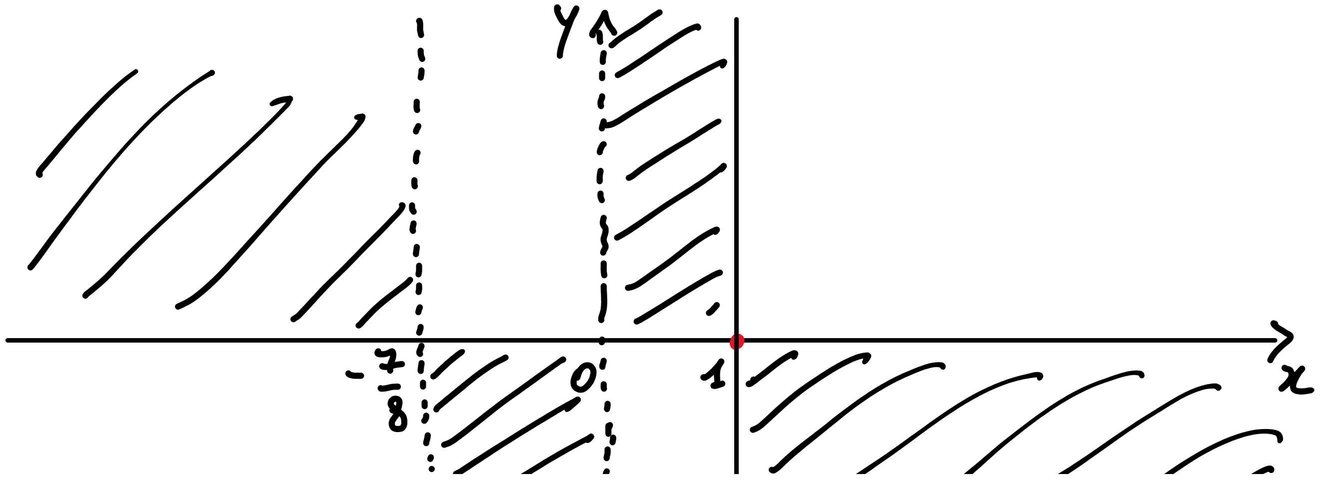
E HO TROVATO IL PUNTO $(1,0)$

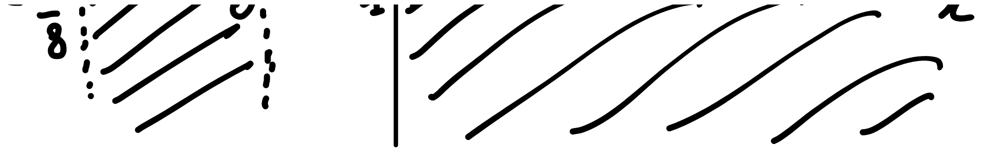
• SEGNO DI f: $y>0$ SE $\frac{x-1}{8x^2+7x} > 0$

$N>0$: $x-1>0 \longrightarrow x>1$

$D>0$: $8x^2+7x>0 \longrightarrow x<-\frac{7}{8} \quad \lor \quad x>0$

	$-\frac{7}{8}$		0		1		
$-$		$-$		$-$		$+$	(N)
$+$		$-$		$+$		$+$	(D)
$-$		$+$		$-$		$+$	

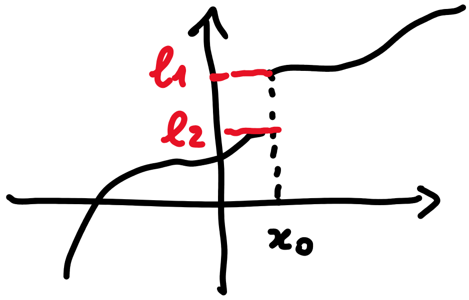




(III)

<u>NOTA</u>: (IL LIMITE NON ESISTE) ESISTONO CASI IN CUI UNA FUNZIONE $f(x)$ NON SI AVVICINA A NESSUN LIMITE (FINITO O INFINITO). UN CASO SEMPLICE È QUANDO $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$

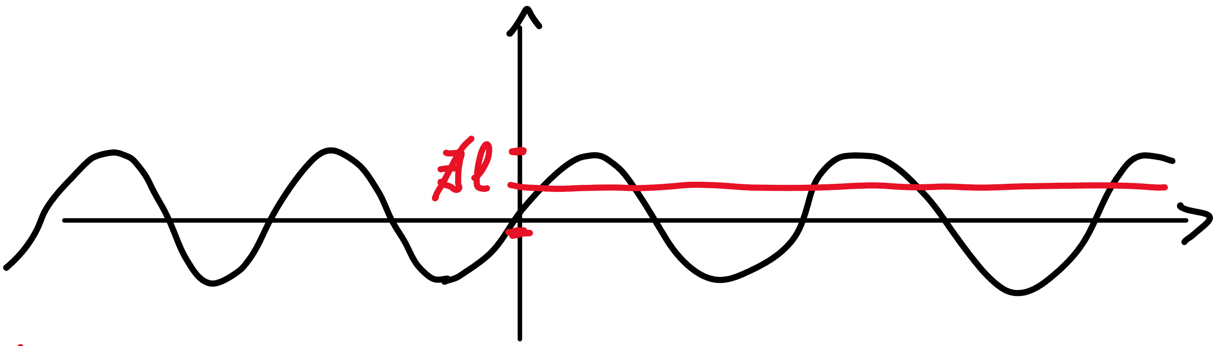
CON $l_1 \neq l_2$



IN QUESTO CASO SCRIVIAMO

$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

ESEMPIO: $f(x) = \sin x$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \sin x = ?$



$\nexists l$ TALE CHE $l - \varepsilon < \sin x < l + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ IL LIMITE NON ESISTE.

PROPRIETÀ DEI LIMITI: NOTAZIONE: $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

i) $\lim_{x \to \alpha} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x)$

ii) $\lim_{x \to \alpha} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x \to \alpha} f(x)\right)\left(\lim_{x \to \alpha} g(x)\right)$

SUPP. CHE $\lim_{x \to \alpha} g(x) \neq 0$

iii) $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to \alpha} f(x)}{\lim_{x \to \alpha} g(x)}$

$\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$,

$+\infty \pm l = +\infty$

$-\infty \pm l = -\infty$

$+\infty - \infty =$ F.I.

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^4 - x^3 = +\infty - \infty$ F.I.

$\lim_{x \to +\infty} x^4\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty\left(1 - \frac{1}{\infty}\right) = +\infty(1-0)$

$= +\infty$

PRODOTTO DEI LIMITI (RAPPORTO) SEGUE LA REGOLA DEI SEGNI

$$(\pm\infty)(\pm l) = \pm\infty \longrightarrow$$

	+	−
+	+	−
−	−	+

$$\frac{\pm\infty}{\pm l} = \pm\infty \quad ;$$

$$\frac{0^{\pm}}{\pm\infty} = 0 \quad ; \qquad \frac{\pm\infty}{0^{\pm}} = \pm\infty \quad ;$$

$$0 \cdot \infty = \text{F.I.} \qquad \frac{\infty}{\infty} = \text{F.I.}$$

$$\frac{0}{0} = \text{F.I.}$$

ESEMPI:

1) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

2) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x+1}{\ln(x)} = \frac{0+1}{\ln(0)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

3) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{5}{e^x} = \frac{5}{e^{-\infty}} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

RICAPITOLANDO: SAPPIAMO CALCOLARE I LIMITI GRAZIE ALLE PROPRIETÀ VISTE PRIMA (SOMMA - PRODOTTO - RAPPORTO), PERÒ SORGONO PROBLEMI CON LE F.I.

FACCIAMO 3 CONSIDERAZIONI SU CASI PARTICOLARI,

TUTTE BASATE SU SITUAZIONI IN CUI CALCOLIAMO LIMITI DI RAPPORTI:

1) RAPPORTO TRA POLINOMI CON $x \to \pm\infty$

Es: $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 5x + 7}{x^2 - 2x} = \frac{+\infty - \infty - \infty}{+\infty - \infty}$$

POSSIAMO METTERE IN EVIDENZA IL TERMINE DI GRADO MAX SIA AL NUMERATORE SIA AL DENOMINATORE, POI SEMPLIFICARE:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^4}^{\,2}\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$\frac{3}{x^2} \to 0$, $\frac{5}{x^3} \to 0$, $\frac{7}{x^4} \to 0$, $\frac{2}{x} \to 0$

IN GENERALE PER CALCOLARE IL LIM. PER $x \to \pm\infty$ DI UN RAPPORTO TRA POLINOMI, SI RACCOGLIE IL TERMINE DI GRADO MAX SIA AL NUM. CHE AL DENOM., POI SI SEMPLIFICA E SI CALCOLA IL LIMITE.

2) GERARCHIA DEGLI INFINITI: $a^x >> x^\alpha >> \log_b(x)$

ESISTONO 3 "VELOCITÁ" DIVERSE PER FUNZIONI CHE TENDONO A $+\infty$. VALE CHE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

$x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_b(x)} = +\infty \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b(x)}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{\log_b(x)} = +\infty \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{a^x} = 0$$

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 5}{x^{1000}} = +\infty$

3) INFINITI EQUIVALENTI: DUE FUNZIONI $f(x), g(x)$ SI DICONO ESSERE INFINITI EQUIVALENTI SE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \text{E SI SCRIVE } f \sim g$$

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} = 1$, $\frac{3}{x^2} \to 0$

OSSIA $x^2 \sim x^2 - 3$

SE $f \sim f_1$ ED $g \sim g_1$ ALLORA

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 3} \underset{x^2 \sim x^2 - 3}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

RIPRENDIAMO LO STUDIO DI FUNZIONE VISTO PRIMA.

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{0, -\frac{7}{8}\right\} = \left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cup \left(-\frac{7}{8}, 0\right) \cup (0, +\infty)$$

VOGLIAMO STUDIARE IL COMPORTAMENTO DI f IN TUTTI E 6 GLI ESTREMI.

1) $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(8 + \frac{7}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{-\infty \cdot 8} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE $(A\ -\infty)$

2) $$\lim_{x \to -\frac{7}{8}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{7}{8}^-} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \frac{-\frac{15}{8}}{8\left(\frac{49}{64}\right)^+ - \left(\frac{49}{8}\right)^-} =$$

$$= \frac{-\frac{15}{8}}{\frac{49}{8}^+ - \frac{49}{8}^-} = \frac{-\frac{15}{8}}{0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow x = -\frac{7}{8}$ ASINTOTO VERTICALE (DA SX)

3) $$\lim_{x \to -\frac{7}{8}^+} \frac{x-1}{8x^2+7x} = \frac{-\frac{15}{8}}{0^-} = +\infty$$

$\Rightarrow x = -\frac{7}{8}$ ASINTOTO VERTICALE (DA DX)

4) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{8x^2+7x} = \dfrac{-1}{0^+ + 0^-} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

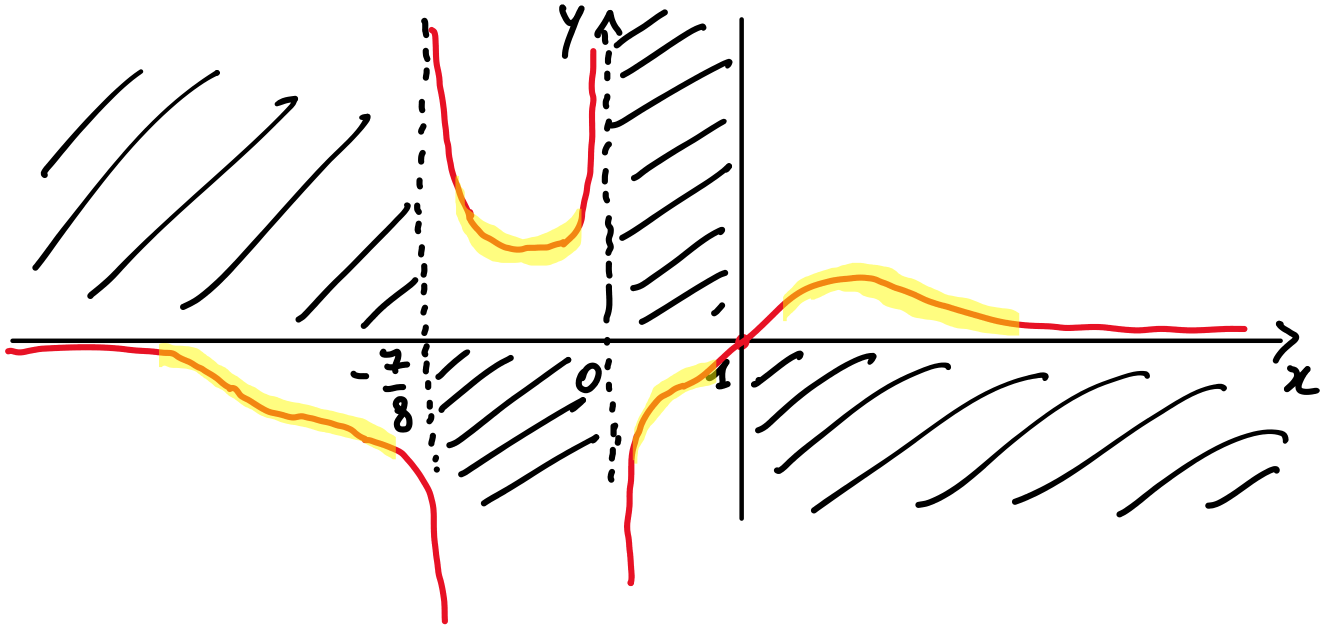
5) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{8x^2+7x} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

$\Rightarrow x=0$ ASINTOTO VERTICALE (COMPLETO)

6) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{8x^2+7x} = 0$

ESERCIZIO

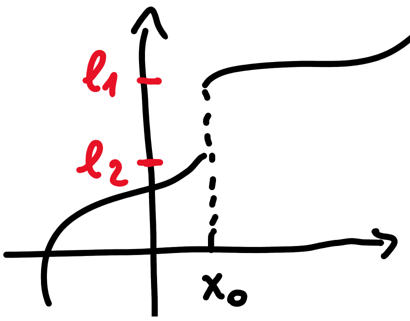
$\Rightarrow y=0$ ASINTOTO ORIZZONTALE (A $+\infty$)



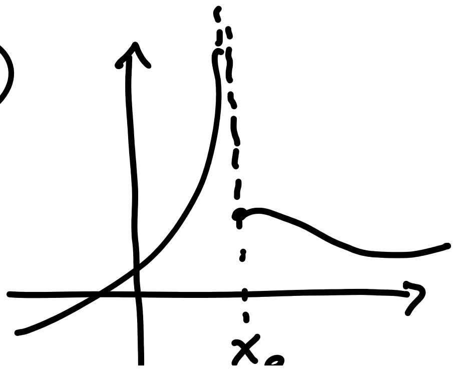
IV

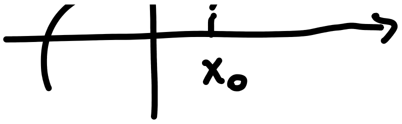
PUNTI DI DISCONTINUITÀ:

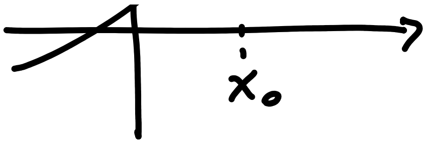
1



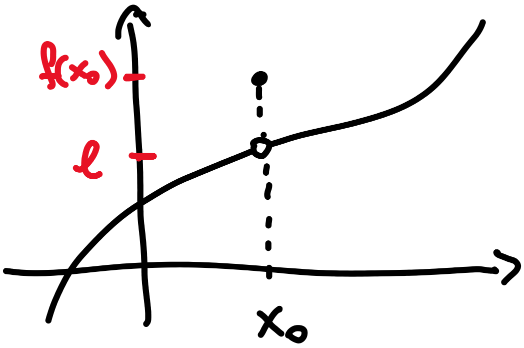
2







3



DEF: SI DEFINISCONO 3 TIPI DI PUNTI DI DISCONTINUITÁ. RICORDIAMO CHE UNA FUNZIONE f SI DICE CONTINUA IN x_0 SE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

I PUNTI DI DISCONTINUITÁ SONO INVECE:

i) <u>I SPECIE</u>: SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1$ E $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$ MA $\ell_1 \neq \ell_2$

($|\ell_2 - \ell_1|$ SI CHIAMA "SALTO" IN x_0)

ii) <u>II SPECIE</u>: SE ALMENO UNO DEI DUE LIMITI ($x \to x_0^+$ O $x \to x_0^-$) É INFINITO O NON ESISTE.

iii) <u>III SPECIE</u>: SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ COINCIDONO, MA $\ell \neq f(x_0)$ O $f(x_0)$ NON É DEFINITA.

ESERCIZI: CLASSIFICARE I PUNTI DI DISCONTINUITÀ DELLE SEGUENTI FUNZIONI:

1) $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se } x < 2 \\ x-1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

2) $y = \dfrac{x}{x-1}$

3) $y = \dfrac{1-x^2}{x-1}$